

1 Suites convergentes ou divergentes

Exercice 1 ★ Nature –

Étudier la nature des suites suivantes, et déterminer leur limite éventuelle :

$$\begin{array}{ll} 1. u_n = \frac{\sin(n) + 3 \cos(n^2)}{\sqrt{n}} & 2. u_n = \frac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}} \\ 3. u_n = \frac{n^3 + 5n}{4n^2 + \sin(n) + \ln(n)} & 4. u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1} \\ 5. u_n = 3^n e^{-3n}. & 6. u_n = \frac{n^3 + 2^n}{n^2 + 3^n}. \end{array}$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[63]

Exercice 2 ★★★★★ Nature –

Étudier la nature des suites suivantes, et déterminer leur limite éventuelle :

$$\begin{array}{ll} 1. u_n = \ln(2n^2 - n) - \ln(3n + 1) & 2. u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1} \\ 3. u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}, a, b \in]0, +\infty[& 4. u_n = \frac{\ln(n + e^n)}{n} \\ 5. u_n = \frac{\ln(1 + \sqrt{n})}{\ln(1 + n^2)}. \end{array}$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[64]

Exercice 3 ★★★★★ Nature –

Étudier la nature des suites suivantes, et déterminer leur limite éventuelle :

$$\begin{array}{ll} 1. u_n = \frac{\ln(n!)}{n^2} & 2. u_n = e^{-\sqrt{n}} \ln(1 + n + e^n) \\ 3. u_n = \sqrt{n} \ln\left(\frac{\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n} - 1}\right) \end{array}$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[65]

Exercice 4 ★★★★★ Un produit –

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \dots \left(1 + \frac{n-1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{n}{n^2}\right).$$

On pose $v_n = \ln(u_n)$.

1. Montrer, pour tout $x \geq 0$, l'inégalité

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x.$$

2. En déduire que

$$\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq v_n \leq \frac{n+1}{2n}.$$

On admettra que

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Montrer que (v_n) converge, et préciser sa limite.

4. Montrer que (u_n) converge, et préciser sa limite.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[71]

Exercice 5 ★★★★★ Deux exemples avec des suites trigonométriques –

1. Montrer que la suite (x_n) définie par $x_n = \cos\left(\left(n + \frac{1}{n}\right)\pi\right)$ est divergente.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$ est un entier pair. En déduire que la suite $\left(\sin\left(\left(3 + \sqrt{5}\right)^n \pi\right)\right)$ converge et déterminer sa limite.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$ est un entier pair.

4. En déduire que la suite $\left(\sin\left(\left(3 + \sqrt{5}\right)^n \pi\right)\right)$ converge et déterminer sa limite.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[72]

Exercice 6 ★★★★★ Une suite définie comme étant la racine d'un polynôme –

Pour $n \geq 1$, on considère le polynôme $P_n(X) = X^n + X^{n-1} + \dots + X - 1$.

1. Démontrer que P_n possède une seule racine dans \mathbb{R}_+ , que l'on note u_n .

2. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante, et en déduire qu'elle converge.

3. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq \frac{1}{2}$.

4. Soit $\rho \in]1/2, 1[$. Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(\rho) > 0$.

5. Démontrer que (u_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[74]

Exercice 7 ★★★★★ Cosinus et Sinus –

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que θ n'est pas congru à 0 modulo π . On pose $u_n = \cos(n\theta)$ et $v_n = \sin(n\theta)$.

1. Montrer que (u_n) converge si et seulement si (v_n) converge.

2. En déduire que les deux suites sont divergentes.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[73]

Exercice 8 ★★★★★ Radicaux itérés –

Soit $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1 + \sqrt{\dots + \sqrt{1}}}}$.

1. Écrire une formule de récurrence liant u_{n-1} et u_n .

2. Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)$ est bornée.

3. Déterminer sa limite.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[75]

2 Suites définies par une somme

Exercice 9 ★★★★★ Somme télescopique –

1. Déterminer deux réels a et b tels que

$$\frac{1}{k^2 - 1} = \frac{a}{k - 1} + \frac{b}{k + 1}.$$

2. En déduire la limite de la suite

$$u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1}.$$

3. Sur le même modèle, déterminer la limite de la suite

$$v_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k^2 + 3k + 2}.$$

Exercice 10 ★★ Une série de Riemann –

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

En déduire le comportement de la suite (u_n) définie par

$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Exercice 11 ★★ Une suite monotone –

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

1. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

2. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

3. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.

4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 12 ★★★ Somme harmonique –

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Démontrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}.$$

En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$.

Exercice 13 ★★★★★ Somme à paramètre –

Soit $\alpha > 0$ et $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^\alpha + k^\alpha}$.

1. Démontrer que si $\alpha > 1$ alors $u_n \rightarrow 0$.

2. Démontrer que si $\alpha < 1$, alors $u_n \rightarrow +\infty$.

3. Démontrer que si $\alpha = 1$, la suite est monotone et convergente.

4. Démontrer que, pour tout $x \in [0, 1[$, $\ln(1+x) \leq x \leq -\ln(1-x)$.

5. En déduire que $u_n \rightarrow \ln 2$.

3 Suites adjacentes

Exercice 14 ★ Exemple de suites adjacentes –

Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) données ci-dessous forment des couples de suites adjacentes.

1. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$
2. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n}$ et $v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[83]

Exercice 15 Série alternée –

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$. Etudier les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) . Quelle est la nature de (u_n) ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[84]

Exercice 16 Irrationalité de e –

Soient (u_n) et (v_n) les deux suites définies pour $n \geq 1$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}.$$

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On note e leur limite commune.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n!u_n < n!e < n!u_n + \frac{1}{n}$.
3. En déduire que e est un nombre irrationnel (on pourra procéder par l'absurde).
4. Écrire une fonction `approx(ecart)` sous Python qui renvoie un encadrement de e avec une amplitude inférieure à `ecart`.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[85]

Exercice 17 Un équivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ –

Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \text{ et } v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}.$$

1. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n)$.
2. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont monotones.
3. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite ℓ avec $\ell \leq -1$.
4. Quelle est la limite de $\frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}}{2\sqrt{n}}$?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2158]

4 Suites récurrentes

Exercice 18 Fonction croissante - avec indications –

On considère la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = x^2 + \frac{3}{16}$ et $u_0 \geq 0$.

1. Étudier f et le signe de $f(x) - x$. Quelles sont les limites possible de (u_n) ?
2. On suppose $u_0 \in [0, 1/4]$. Montrer que $u_n \in [0, 1/4]$ pour tout n , puis que (u_n) est croissante. Quelle est la nature de (u_n) (si elle est convergente, préciser sa limite) ?
3. On suppose $u_0 \in [1/4; 3/4]$. Montrer que (u_n) est décroissante et minorée. Quelle est la nature de (u_n) (si elle est convergente, préciser sa limite) ?
4. On suppose $u_0 > 3/4$. Montrer que (u_n) est croissante. Quelle est la nature de (u_n) (si elle est convergente, préciser sa limite) ?

Exercice 19 ★★ **Fonction décroissante - avec indications –**

Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ définie par $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$. On considère la suite récurrente (u_n) vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 1$.

1. Étudier le sens de variation de f sur $[1, 3]$ et montrer que l'intervalle $[1, 3]$ est stable par f . Que peut-on en déduire sur (u_n) ?
2. Soit (v_n) et (w_n) les suites définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Montrer que (v_n) est croissante.
3. Démontrer que (w_n) est décroissante.
4. En déduire que (v_n) et (w_n) sont convergentes et déterminer leur limite respective.
5. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

Indication ▼ Correction ▼

[87]

Exercice 20 ★ **Fonction décroissante et deux suites extraites qui ne convergent pas vers la même limite –**

Soit $f(x) = (1 - x)^2$ et la suite (u_n) définie par $u_0 = 1/2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer que $[0, 1]$ est stable par f . Quel est le sens de variation de f sur $[0, 1]$?
2. On pose $g = f \circ f$. Quel est le sens de variation de g sur $[0, 1]$?
3. Résoudre l'équation $g(x) = x$.
4. Pour $n \geq 0$, on pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$, de sorte que $v_{n+1} = g(v_n)$ et $w_{n+1} = g(w_n)$. Démontrer que (v_n) est croissante, et déterminer sa limite. Démontrer que (w_n) est décroissante, et déterminer sa limite.
5. Que peut-on en déduire sur la suite (u_n) ?

Indication ▼ Correction ▼

[3062]

Exercice 21 ★★ **Fonction croissante - sans indication –**

Étudier les suites récurrentes suivantes :

1. $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$;
2. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$. Que se passe-t-il si on choisit $u_0 = 2$?

Indication ▼ Correction ▼

[88]

Exercice 22 ★★★ **Fonctions décroissantes - sans indications –**

Étudier les suites récurrentes suivantes :

1. $u_0 = 1/2$ et $u_{n+1} = (1 - u_n)^2$.
2. $u_0 = 1/2$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 - u_n}$.

Indication ▼ Correction ▼

[89]

Exercice 23 ★★ **Avec des complexes –**

Étudier la suite définie par $u_0 \in \mathbb{C}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{5}(3u_n - 2\bar{u}_n)$

Indication ▼ Correction ▼

[68]

Exercice 24 ★ **Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 –**

Donner l'expression du terme général des suites récurrentes (u_n) suivantes :

1. $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$, $u_0 = 3$, $u_1 = 5$.
2. $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$, $u_0 = 1$, $u_1 = 0$.
3. $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$, $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$.

Indication ▼ Correction ▼

[91]

Exercice 25 ★★★★★ **Suites homographiques –**

Soit (z_n) une suite définie par $z_0 \in \mathbb{C}$ et la relation

$$z_{n+1} = \frac{az_n + b}{cz_n + d},$$

où a, b, c, d sont des complexes tels que $ad - bc \neq 0$ et $c \neq 0$. On suppose dans toute la suite que z_0 est choisi de sorte que la suite (z_n) soit bien définie.

1. Montrer que la fonction $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ admet un ou deux points fixes dans \mathbb{C} .
2. On suppose que f admet deux points fixes α et β et on pose

$$w_n = \frac{z_n - \alpha}{z_n - \beta}$$

(on suppose donc aussi que $z_n \neq \alpha$ et $z_n \neq \beta$ pour tout entier n). Montrer que la suite (w_n) est géométrique. En déduire la nature de la suite définie par $z_0 = i$ et $z_{n+1} = \frac{1}{1-z_n}$.

3. On suppose que f admet un unique point fixe α et on pose

$$w_n = \frac{1}{z_n - \alpha}.$$

Calculer la valeur de α et prouver que

$$f(z) = z - \frac{c(z - \alpha)^2}{cz + d}.$$

Montrer ensuite que la suite (w_n) est arithmétique. En déduire la nature de la suite définie par $z_0 = i$ et $z_{n+1} = \frac{3z_n - 1}{z_n + 1}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[92]

Exercice 26 Suite quadratique –

Soit $a \in \mathbb{C}$. A quelle condition la suite $u_{n+1} = au_n^2$, avec $u_0 \in \mathbb{C}$, converge-t-elle vers zéro ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[93]

5 Suites récurrentes croisées

Exercice 27 Croisées –

Soient (x_n) et (y_n) deux suites de nombres réels définies par $0 < x_0 < y_0$ et

$$\begin{cases} x_{n+1} &= \frac{x_n^2}{x_n + y_n} \\ y_{n+1} &= \frac{y_n^2}{x_n + y_n} \end{cases}$$

1. Montrer que $(y_n - x_n)$ est une suite constante.
2. En déduire que (x_n) est décroissante.
3. Montrer que les deux suites sont convergentes, et calculer leur limite respective.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[94]

Exercice 28 Une moyenne... –

Soient x et y deux nombres réels strictement positifs. On définit :

leur moyenne arithmétique, notée m , par la relation $m = \frac{x+y}{2}$; leur moyenne géométrique, notée g , par la relation $g = \sqrt{xy}$; leur moyenne harmonique, notée h , par la relation $\frac{1}{h} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$.

1. Montrer que $h \leq g \leq m$ et vérifier que $\sqrt{mh} = g$.
2. On définit deux suites u et v par récurrence par la donnée de u_0 et v_0 , avec $0 < v_0 \leq u_0$, et par les relations de récurrence suivante :

u_{n+1} est la moyenne arithmétique de u_n et v_n ; v_{n+1} est la moyenne harmonique de u_n et v_n .

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < v_n \leq u_n$. Montrer que la suite u est décroissante et que la suite v est croissante. Montrer que les deux suites u et v convergent vers la même limite notée l . Montrer que l est la moyenne géométrique de u_0 et v_0 .

3. u_{n+1} est la moyenne arithmétique de u_n et v_n ;
4. v_{n+1} est la moyenne harmonique de u_n et v_n .
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < v_n \leq u_n$.
6. Montrer que la suite u est décroissante et que la suite v est croissante.
7. Montrer que les deux suites u et v convergent vers la même limite notée l .
8. Montrer que l est la moyenne géométrique de u_0 et v_0 .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[95]

Exercice 29 ★★★ Moyenne arithmético-géométrique et suites adjacentes –

Soient $0 \leq b \leq a$ et (u_n) , (v_n) les deux suites définies par

$$u_0 = a, v_0 = b, u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

On admettra que les suites (u_n) et (v_n) sont bien définies avec $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ pour tout entier n .

1. Démontrer que pour tous réels positifs x et y , on a

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

2. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq v_n$, $u_n \geq u_{n+1}$ et $v_{n+1} \geq v_n$.
3. Démontrer que, pour tout $n \geq 0$, on a $0 \leq u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{2}(u_n - v_n)$.
4. Démontrer que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite. Cette limite est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b et est notée $M(a, b)$.
5. Écrire une fonction Python `moyenne(a, b, ecart)` qui donne un encadrement de $M(a, b)$, avec une amplitude inférieure ou égale à `ecart`.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3183]

6 Exercices théoriques

Exercice 30 ★★ Suite convergente à valeurs dans \mathbb{Z} –

Soit (u_n) une suite à valeurs dans \mathbb{Z} , convergente. Montrer, en utilisant la définition, que (u_n) est stationnaire.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[99]

Exercice 31 ★★ Partie entière –

Soit (u_n) une suite convergente. La suite $(\lfloor u_n \rfloor)$ est-elle convergente ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[102]

Exercice 32 ★★ Produit –

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que

$$0 \leq u_n \leq 1, 0 \leq v_n \leq 1 \text{ et } u_n v_n \rightarrow 1.$$

Que pouvez-vous dire des suites (u_n) et (v_n) ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[104]

Exercice 33 ★★★ Critère de d'Alembert –

Soit (u_n) une suite à termes réels strictement positifs telle que $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers un réel l . Nécessairement, on a $l \geq 0$.

1. On suppose $l < 1$ et on fixe $\varepsilon > 0$ tel que $l + \varepsilon < 1$.
Démontrer qu'il existe un entier n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, on a

$$u_n \leq (l + \varepsilon)^{n-n_0} u_{n_0}.$$

En déduire que (u_n) converge vers 0.

2. Démontrer qu'il existe un entier n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, on a

$$u_n \leq (l + \varepsilon)^{n-n_0} u_{n_0}.$$

3. En déduire que (u_n) converge vers 0.
4. On suppose $l > 1$. Démontrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.
5. Étudier le cas $l = 1$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[105]

Exercice 34 ★★★★★ Comparaison logarithmique –

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positifs, tels que, pour tout $n \geq 0$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

1. On suppose que (v_n) converge vers 0. Montrer que (u_n) converge aussi vers 0.
2. On suppose que (u_n) tend vers $+\infty$. Quelle est la nature de (v_n) ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[107]

Exercice 35 ★★★★★ Moyenne de Cesàro –

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle. On pose $S_n = \frac{u_1 + \dots + u_n}{n}$.

1. On suppose que (u_n) converge vers 0. Soient $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour $n \geq n_0$, on a $|u_n| \leq \varepsilon$.
Montrer qu'il existe une constante M telle que, pour $n \geq n_0$, on a

$$|S_n| \leq \frac{M(n_0 - 1)}{n} + \varepsilon.$$

En déduire que (S_n) converge vers 0.

2. Montrer qu'il existe une constante M telle que, pour $n \geq n_0$, on a

$$|S_n| \leq \frac{M(n_0 - 1)}{n} + \varepsilon.$$

3. En déduire que (S_n) converge vers 0.
4. On suppose que $u_n = (-1)^n$. Que dire de (S_n) ? Qu'en déduisez-vous ?
5. On suppose que (u_n) converge vers l . Montrer que (S_n) converge vers l .
6. On suppose que (u_n) tend vers $+\infty$. Montrer que (S_n) tend vers $+\infty$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[108]

Exercice 36 ★★★★★ Produit de Cauchy –

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergeant respectivement vers u et v . Montrer que la suite $w_n = \frac{u_0 v_n + \dots + u_n v_0}{n+1}$ converge vers uv .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[109]

Exercice 37 ★★★★★ Suite sur-additive –

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels telle que, pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$,

$$u_{m+n} \geq u_m + u_n.$$

On suppose que l'ensemble $\{\frac{u_n}{n}; n \in \mathbb{N}^*\}$ est majoré, et on note ℓ sa borne supérieure.

1. Soit $m, q, r \in \mathbb{N}$. On pose $n = mq + r$. Comparer u_n et $qu_m + u_r$.

2. On fixe $m \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$. En utilisant la division euclidienne de n par m , démontrer qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n > N$,

$$\frac{u_n}{n} \geq \frac{u_m}{m} - \varepsilon.$$

3. Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = \ell$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2538]

Exercice 38 ★★ Suites bornées –

Soit (u_n) une suite de nombre réels.

1. On suppose que $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers $\ell < 0$. Démontrer qu'il existe $A < 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} - u_n \leq A$. En déduire que (u_n) n'est pas bornée. Démontrer de même que si $(u_{n+1} - u_n)$ tend vers $-\infty$, alors (u_n) n'est pas bornée. Démontrer de même que si $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers $\ell > 0$, alors (u_n) n'est pas bornée.

2. On suppose que $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers $\ell < 0$. Démontrer qu'il existe $A < 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} - u_n \leq A$. En déduire que (u_n) n'est pas bornée.

3. Démontrer de même que si $(u_{n+1} - u_n)$ tend vers $-\infty$, alors (u_n) n'est pas bornée.

4. Démontrer de même que si $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers $\ell > 0$, alors (u_n) n'est pas bornée.

5. Déduire des questions précédentes que si (u_n) est une suite bornée telle que $(u_{n+1} - u_n)$ est décroissante, alors (u_n) est convergente.

6. Que peut-on dire si (u_n) est une suite bornée telle que $(u_{n+1} - u_n)$ est croissante ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2617]

Exercice 39 ★★ Suites extraites - pour bien comprendre... –

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Parmi les suites ci-dessous, trouver celles qui sont extraites d'une autre :

$$(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}, (u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}, (u_{6n})_{n \in \mathbb{N}}, (u_{3 \cdot 2^n})_{n \in \mathbb{N}}, (u_{3 \cdot 2^{n+1}})_{n \in \mathbb{N}}, (u_{2^n})_{n \in \mathbb{N}}, (u_{2^{n+1}})_{n \in \mathbb{N}}.$$

2. Soit $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Montrer que toute suite extraite de $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[110]

Exercice 40 ★★ Convergence des suites extraites –

Soit (u_n) une suite de nombres réels.

1. On suppose que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite. Prouver que (u_n) est convergente.

2. Donner un exemple de suite telle que (u_{2n}) converge, (u_{2n+1}) converge, mais (u_n) n'est pas convergente.

3. On suppose que les suites (u_{2n}) , (u_{2n+1}) et (u_{3n}) sont convergentes. Prouver que (u_n) est convergente.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[111]

Exercice 41 ★★ Suites extraites vérifiant certaines propriétés –

Soit (u_n) une suite de nombre réels.

1. On suppose que (u_n) est croissante et qu'elle admet une suite extraite convergente. Que dire de (u_n) ?

2. On suppose que (u_n) est croissante et qu'elle admet une suite extraite majorée. Que dire de (u_n) ?

3. On suppose que (u_n) n'est pas majorée. Montrer qu'elle admet une suite extraite qui diverge vers $+\infty$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[112]

Exercice 42 ★★★★★ **Valeur d'adhérence –**

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que le réel l est valeur d'adhérence de la suite s'il existe une suite extraite de (u_n) qui converge vers l .

1. Quelles sont les valeurs d'adhérence d'une suite convergente ?
2. Quelles sont les valeurs d'adhérence de la suite $(-1)^n$? de la suite $\cos(n\pi/3)$?
3. Donner un exemple de suite qui ne converge pas et qui possède une unique valeur d'adhérence.
4. Prouver que si (u_n) est bornée et est divergente, elle admet toujours (au moins) deux valeurs d'adhérence distinctes.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[113]

Exercice 43 ★★★★★ **Suites de Cauchy –**

Une suite (u_n) de nombre réels est appelée suite de Cauchy si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que, pour tout $p, q \geq N$, on a

$$|u_p - u_q| < \varepsilon.$$

1. Montrer que toute suite convergente est une suite de Cauchy.
2. On souhaite prouver la réciproque à la question précédente. Soit (u_n) une suite de Cauchy. Montrer que (u_n) est bornée. On suppose que (u_n) admet une suite extraite convergente. Montrer que (u_n) est convergente. Conclure.
3. Montrer que (u_n) est bornée.
4. On suppose que (u_n) admet une suite extraite convergente. Montrer que (u_n) est convergente.
5. Conclure.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[114]

Indication pour l'exercice 1 ▲

1. Par quoi peut-on immédiatement majorer $|\sin(x)|$ et $|\cos(x)|$? Utiliser ensuite un théorème de comparaison.
 2. Factoriser au numérateur et au dénominateur par le terme dominant.
 3. Idem.
 4. Utiliser la quantité conjuguée.
 5. Écrire tout sous une seule puissance.
 6. Factoriser au numérateur et au dénominateur par le terme dominant
-

Indication pour l'exercice 2 ▲

1. Mettre en facteur le terme dominant dans chaque logarithme.
 2. Utiliser la quantité conjuguée.
 3. Distinguer les cas $a < b$, $a = b$ et $b > a$. Dans tous les cas, factoriser au numérateur et au dénominateur par le terme dominant.
 4. Factoriser par le terme dominant dans le logarithme.
 5. Idem.
-

Indication pour l'exercice 3 ▲

1. Faire apparaître une somme de logarithmes, et la majorer.
 2. Factoriser par le terme dominant dans le logarithme.
 3. Utiliser des propriétés fonctionnelles du logarithme, puis factoriser par \sqrt{n} dans le logarithme.
-

Indication pour l'exercice 4 ▲

1. Étudier les fonctions $f(x) = x - \ln(1+x)$ et $g(x) = (x - x^2/2) - \ln(1+x)$.
 2. Utiliser $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$, puis les inégalités précédentes.
 3. Utiliser le théorème d'encadrement des limites (ou théorème des gendarmes).
 4. $u_n = \exp(v_n)$.
-

Indication pour l'exercice 5 ▲

1. Utiliser des suites extraites.
 2. Formule du binôme. $|3 - \sqrt{5}| < 1$.
 3. Formule du binôme.
 4. $|3 - \sqrt{5}| < 1$.
-

Indication pour l'exercice 6 ▲

1. "Théorème de la bijection".
 2. P_n est une fonction croissante.
 3. Calculer $P_n(1/2)$.
 4. Calculer $P_n(\rho)$.
 5. Utiliser la croissance de P_n .
-

Indication pour l'exercice 7 ▲

1. Utiliser les formules de trigonométrie pour écrire $\cos((n+1)\theta)$.
 2. Notons a la limite de (u_n) et b la limite de (v_n) . En utilisant les résultats de la première question, démontrer que $a = b = 0$ et en déduire une contradiction par le théorème de Pythagore.
-

Indication pour l'exercice 8 ▲

- 1.
2. Prouver par récurrence sur n que $\sqrt{n} \leq u_n \leq \sqrt{2n}$.

3. Repartir des inégalités précédemment trouvées.

Indication pour l'exercice 9 ▲

1. Procéder par identification.
 2. En utilisant la question précédente, on fait apparaître deux sommes, mais de nombreux termes se simplifient.
 3. Factoriser $k^2 + 3k + 2 = (k + 1)(k + 2)$.
-

Indication pour l'exercice 10 ▲

Pour la première question, utiliser la quantité conjuguée. Pour la seconde, on a affaire à une somme télescopique.

Indication pour l'exercice 11 ▲

- 1.
 - 2.
 3. Procéder par récurrence sur $n \geq 1$. Dans l'étape d'hérédité, utiliser la question précédente.
 - 4.
-

Indication pour l'exercice 12 ▲

Pour la deuxième partie, remarquer que (H_n) est une suite croissante, donc on connaît son comportement...

Indication pour l'exercice 13 ▲

1. Majorer u_n .
 2. Minorer u_n .
 3. Montrer que de plus elle est majorée.
 4. Étudier la fonction.
 5. Appliquer le résultat de la question précédente à $x = \frac{1}{n+k}$ et sommer les inégalités.
-

Indication pour l'exercice 14 ▲

1. Appliquer la définition.
 2. Appliquer la définition !
-

Indication pour l'exercice 15 ▲

Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes.

Indication pour l'exercice 16 ▲

1. Il suffit d'appliquer la définition !
 - 2.
 3. Procéder par l'absurde, écrire $e = p/q$ et encadrer e par $u_q < e < v_q$. Multiplier par $q!$ et remarquer que $q!u_q$ est entier.
-

Indication pour l'exercice 17 ▲

1. Utiliser la quantité conjuguée pour simplifier la différence des deux racines carrées.
 2. Calculer $u_{n+1} - u_n$.
 3. Théorème sur les suites adjacentes.
 4. Diviser u_n by $2\sqrt{n}$.
-

Indication pour l'exercice 18 ▲

1. Les limites possible sont les solutions de $f(l) = l$.
 2. Remarquer que $f([0, 1/4]) \subset [0, 1/4]$, puis prouver que $0 \leq u_n \leq 1/4$ par récurrence. Le fait que (u_n) est croissante peut se démontrer par récurrence ou plus facilement en utilisant le signe de $f(x) - x$.
 3. Raisonnement très analogue au précédent en remplaçant $[0, 1/4]$ par $[1/4, 3/4]$. On prendra garde à la valeur de départ $u_0 = 3/4$.
 4. Si la suite (u_n) était convergente vers le réel l , quelle inégalité devrait vérifier l ? Conclure.
-

Indication pour l'exercice 19 ▲

- 1.
 2. Poser $g = f \circ f$. Remarquer que g est croissante et que $v_{n+1} = g(v_n)$.
 3. $w_n = f(v_n)$.
 4. Que peut-on dire d'une suite croissante majorée? Etudier l'équation aux limites possibles.
 5. (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite.
-

Indication pour l'exercice 20 ▲

- 1.
 - 2.
 - 3.
 - 4.
 - 5.
-

Indication pour l'exercice 21 ▲

1. Montrer que $u_1 \geq 2$, puis que la suite (u_n) est croissante. Peut-elle être majorée?
 2. Introduire la fonction $f(x) = \sqrt{1+x}$, étudier ses variations, chercher les solutions de $f(x) = x$, en déduire un intervalle stable pour f . Appliquer cela à l'étude de (u_n) .
-

Indication pour l'exercice 22 ▲

1. Remarquer que $[0, 1]$ est un intervalle stable par $f(x) = (1-x)^2$ sur lequel la fonction est décroissante. Étudier les suites $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
 2. Remarquer que $[0, 1]$ est un intervalle stable par $f(x) = \sqrt{1-x}$ sur lequel la fonction est décroissante. Étudier les suites $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
-

Indication pour l'exercice 23 ▲

Introduire les parties réelles et imaginaires de u_n et regarder les relations de récurrence vérifiées par ces suites.

Indication pour l'exercice 24 ▲

Utiliser le théorème!

Indication pour l'exercice 25 ▲

1. L'équation est équivalente à chercher les racines d'un polynôme de degré 2.
2. Écrire

$$\frac{z_{n+1} - \alpha}{z_{n+1} - \beta} = \frac{f(z_n) - f(\alpha)}{f(z_n) - f(\beta)}$$

et tout développer.

3. $\alpha = \frac{a-d}{2c}$ car le discriminant est nul. Calculer $f(z) - \alpha$ en utilisant la formule indiquée pour f . Factoriser par $(z - \alpha)$, puis exprimer $cz + d$ en fonction de $z - \alpha$ et d'une constante.
-

Indication pour l'exercice 26 ▲

Étudier quand on a $|u_1| < |u_0|$, puis faire une récurrence.

Indication pour l'exercice 27 ▲

1. Il suffit de calculer $x_{n+1} - y_{n+1}$.
 2. Utiliser le résultat de la question précédente sous la forme $y_n \geq x_n$.
 - 3.
-

Indication pour l'exercice 28 ▲

1. Écrire $g \leq m \iff g^2 \leq m^2$ et développer. Procéder de même pour l'autre inégalité.
 2. Récurrence. Utiliser que $v_n \leq u_n$ pour en déduire que $u_{n+1} \leq u_n$. Que doit vérifier une suite croissante pour être convergente ? Passer à la limite dans la définition. Que vous dit l'égalité $\sqrt{mh} = g$ sur les suites (u_n) et (v_n) .
 3. Récurrence.
 4. Utiliser que $v_n \leq u_n$ pour en déduire que $u_{n+1} \leq u_n$.
 5. Que doit vérifier une suite croissante pour être convergente ? Passer à la limite dans la définition.
 6. Que vous dit l'égalité $\sqrt{mh} = g$ sur les suites (u_n) et (v_n) .
-

Indication pour l'exercice 29 ▲

1. $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$.
 2. Appliquer la question précédente.
 3. Utiliser que $\sqrt{u_n v_n} \geq v_n$.
 4. Les deux suites sont adjacentes.
 5. Il suffit de calculer les termes successifs jusqu'à ce que $u_n - v_n \leq \varepsilon$.
-

Indication pour l'exercice 30 ▲

Appliquer la définition de la limite avec $\varepsilon < 1/4$, et utiliser que deux entiers distants de moins de $1/2$ sont égaux.

Indication pour l'exercice 31 ▲

Trouver un contre-exemple (une suite tantôt positive, tantôt négative convient).

Indication pour l'exercice 32 ▲

Montrer qu'elles convergent toutes les deux vers 1 en procédant par l'absurde.

Indication pour l'exercice 33 ▲

1. Théorème d'encadrement.
 - 2.
 3. Théorème d'encadrement.
 4. Prendre $l - \varepsilon > 1$.
 5. Penser aux suites $u_n = n^\alpha$.
-

Indication pour l'exercice 34 ▲

Pour les deux questions, comparer u_n et v_n à l'aide de u_0 et v_0 et de la formule proposée.

Indication pour l'exercice 35 ▲

1. Couper la somme en deux. Choisir n assez grand pour que $\frac{M(n_0-1)}{n} \leq \varepsilon$.

2. Couper la somme en deux.
 3. Choisir n assez grand pour que $\frac{M(n_0-1)}{n} \leq \varepsilon$.
 4. Calculer la valeur de S_{2p} et de S_{2p+1} . Que dire de la réciproque ?
 5. Appliquer les résultats précédents à $v_n = u_n - l$.
 6. Copier la méthode précédente, en remplaçant $\leq \varepsilon$ par $\geq A$.
-

Indication pour l'exercice 36 ▲

S'inspirer à la fois du preuve de la convergence des moyennes de Cesàro (on coupera ici la somme en 3 en isolant les bords) et de la convergence du produit de deux suites convergentes.

Indication pour l'exercice 37 ▲

- 1.
 2. Utiliser l'inégalité précédente. On se rappellera les valeurs possibles de r ...
 3. Choisir m de sorte que $\frac{um}{m}$ ne soit pas trop éloigné de ℓ .
-

Indication pour l'exercice 38 ▲

1. Appliquer la définition de la convergence vers ℓ à un $\varepsilon > 0$ bien choisi.
Considérer $v_n = -u_n$.
 2. Appliquer la définition de la convergence vers ℓ à un $\varepsilon > 0$ bien choisi.
 - 3.
 4. Considérer $v_n = -u_n$.
 5. Démontrer que $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0.
 - 6.
-

Indication pour l'exercice 39 ▲

1. Extraire une suite consiste à sélectionner certains termes. Pour chercher les suites extraites de (u_{2n}) , il s'agit de trouver toutes les suites pour lesquelles chaque terme est de la forme $2n$, c'est-à-dire est pair.
 2. La composée de deux applications strictement croissante est strictement croissante.
-

Indication pour l'exercice 40 ▲

1. Revenir à la définition.
 2. Prendre pour u_{2n} et pour u_{2n+1} des suites constantes.
 3. Montrer qu'on peut se ramener aux hypothèses de la question 1 en considérant les suites u_{6n} et u_{6n+3} .
-

Indication pour l'exercice 41 ▲

1. Utiliser qu'une suite convergente est majorée, et traiter directement la deuxième question de l'exercice.
2. Montrer que (u_n) est elle-même majorée par un majorant de la suite extraite.
3. Construire par récurrence sur n des entiers $\phi(n)$ tels que

$$\phi(n+1) > \phi(n) \text{ et } u_{\phi(n)} \geq n.$$

Indication pour l'exercice 42 ▲

1. Quel est le comportement d'une suite extraite d'une suite convergente ?
2. Ces suites ne prennent qu'un nombre fini de valeurs, les valeurs d'adhérence sont parmi ces valeurs. Montrer que ce sont toutes ces valeurs.
3. Définir séparément u_{2n} (pour garantir l'existence d'une valeur d'adhérence) et u_{2n+1} (pour garantir que (u_n) ne converge pas).

4. Fabriquer une valeur d'adhérence a par le théorème de Bolzano-Weierstrass, puis fabriquer une suite extraite dont tous les termes sont loin de a . Fabriquer une deuxième valeur d'adhérence à partir de cette suite extraite.

Indication pour l'exercice 43 ▲

1. Passer par la limite et utiliser l'inégalité triangulaire.
 2. Appliquer la définition d'une suite de Cauchy avec $\varepsilon = 1$ et contrôler tous les termes de la fin par u_N . Soit a la limite de la suite extraite. Grâce à cette suite extraite, on sait que certains termes de la suite seront proches de a . Puisque c'est une suite de Cauchy, il ne s'en écarteront pas. Il faut ensuite mettre les epsilon dans le bon sens ! Plus qu'un magnifique théorème à utiliser !
 3. Appliquer la définition d'une suite de Cauchy avec $\varepsilon = 1$ et contrôler tous les termes de la fin par u_N .
 4. Soit a la limite de la suite extraite. Grâce à cette suite extraite, on sait que certains termes de la suite seront proches de a . Puisque c'est une suite de Cauchy, il ne s'en écarteront pas. Il faut ensuite mettre les epsilon dans le bon sens !
 5. Plus qu'un magnifique théorème à utiliser !
-

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Utilisant que $|\sin(x)| \leq 1$ et $|\cos(x)| \leq 1$, on obtient

$$|u_n| \leq \frac{4}{\sqrt{n}}.$$

Par le théorème d'encadrement des limites, (u_n) converge vers 0.

2. On factorise au numérateur et au dénominateur par le terme dominant :

$$u_n = \frac{2n \left(1 + \frac{(-1)^n}{2n}\right)}{5n \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{5n}\right)} = \frac{2}{5} \times \frac{1 + \frac{(-1)^n}{2n}}{1 + \frac{(-1)^{n+1}}{5n}}.$$

Or, $1 + \frac{(-1)^{n+1}}{5n}$ et $1 + \frac{(-1)^n}{2n}$ tendent vers 1. On en déduit que (u_n) converge vers $2/5$.

3. On factorise au numérateur et au dénominateur par le terme dominant :

$$u_n = \frac{n^3(1 + 5/n^2)}{4n^2 \left(1 + \frac{\sin(n)}{4n^2} + \frac{\ln(n)}{4n^2}\right)} = \frac{n}{4} \times \frac{1 + \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{\sin(n)}{4n^2} + \frac{\ln n}{4n^2}}.$$

Or, $1 + \frac{5}{n^2}$ et $1 + \frac{\sin(n)}{4n^2} + \frac{\ln n}{4n^2}$ tendent tous les deux vers 1 (pour le deuxième terme, procéder comme à la première question pour $\frac{\sin(n)}{4n^2}$ et utiliser la croissance comparée du logarithme et des polynômes). Ainsi, (u_n) tend vers $+\infty$.

4. Multipliant au numérateur et au dénominateur par la quantité conjuguée, on trouve :

$$u_n = \frac{2}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}.$$

Ainsi, (u_n) tend vers 0.

5. Il suffit d'écrire $3^n e^{-3n} = \left(\frac{3}{e^3}\right)^n$ et puisque $0 < \frac{3}{e^3} < 1$, on en déduit que la suite $(3^n e^{-3n})$ tend vers 0.

6. On écrit

$$u_n = \frac{2^n}{3^n} \times \frac{1 + \frac{n^3}{2^n}}{1 + \frac{n^2}{3^n}}.$$

Comme $\frac{n^3}{2^n}$ et $\frac{n^2}{3^n}$ tendent vers 0, et comme $\frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ tend vers 0, on en déduit que (u_n) tend vers 0.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. On met en facteur le terme dominant dans chaque logarithme, de sorte que

$$\begin{aligned} u_n &= \ln \left(2n^2 \left(1 - \frac{1}{2n} \right) \right) - \ln \left(3n \left(1 + \frac{1}{3n} \right) \right) \\ &= 2 \ln n + \ln 2 + \ln \left(1 - \frac{1}{2n} \right) - \ln(n) - \ln(3) - \ln \left(1 + \frac{1}{3n} \right) \\ &= \ln n + \ln 2 - \ln 3 + v_n \end{aligned}$$

où la suite (v_n) tend vers 0. On en déduit que u_n tend vers $+\infty$.

2. On multiplie au numérateur et au dénominateur par la quantité conjuguée, de sorte que

$$u_n = \frac{2n}{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 - n + 1}}.$$

On met encore en facteur, dans chaque racine carrée du dénominateur, le terme dominant (en n^2), et on trouve

$$u_n = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}.$$

Or, $\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}$ tend vers 1 et $\sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}$ tend également vers 1. On en déduit que (u_n) converge vers 1.

3. Si $a = b$, alors $u_n = 0$ pour tout n , et donc (u_n) converge vers 0. Si $a > b$, alors a^n est prépondérant sur b^n au sens que

$$\frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \rightarrow 0$$

puisque $|b/a| < 1$. On factorise donc par a^n au numérateur et au dénominateur :

$$u_n = \frac{a^n \left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n\right)}{a^n \left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n\right)} = \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n}.$$

On en déduit que dans ce cas, (u_n) converge vers 1. Si $b > a$, on factorise cette fois par b^n et c'est $(a/b)^n$ qui converge vers 0. On trouve :

$$u_n = \frac{-1 + \left(\frac{a}{b}\right)^n}{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^n}.$$

(u_n) converge donc vers -1 dans ce cas.

4. On factorise par e^n dans le logarithme. On obtient

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\ln(e^n(1 + ne^{-n}))}{n} \\ &= \frac{n + \ln(1 + ne^{-n})}{n}. \end{aligned}$$

D'autre part, ne^{-n} tend vers 0 (par exemple, on peut écrire $ne^{-n} = \frac{1}{\frac{e^n}{n}}$ et utiliser la comparaison des fonctions exponentielle et polynôme au voisinage de l'infini). Puisque la fonction \ln est continue en 1 et $\ln(1) = 0$, on en déduit que $\ln(1 + ne^{-n})$ tend vers 0. Il vient $\ln(1 + ne^{-n})/n$ tend vers 0, et donc la suite (u_n) converge vers 1.

5. On factorise par le terme dominant dans chaque logarithme. On en déduit

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\ln(\sqrt{n}) + \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\ln(n^2) + \ln(1 + n^{-2})} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{2 \ln(n) + \ln(1 + n^{-2})} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\ln n}}{2 + \frac{\ln(1 + n^{-2})}{\ln n}}. \end{aligned}$$

Puisque $\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $\ln(1 + n^{-2})$ tendent vers 0, (u_n) converge vers $\frac{1}{4}$.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. D'après les propriétés de la fonction logarithme, on sait que

$$\ln(n!) = \ln(1) + \dots + \ln(n) \leq n \ln n.$$

On en déduit, pour $n \geq 1$,

$$0 \leq \frac{\ln(n!)}{n^2} \leq \frac{\ln n}{n}.$$

Par comparaison de la fonction logarithme et des fonctions polynômes, et par le théorème des gendarmes, on en déduit que la suite $(\ln(n!)/n^2)$ tend vers 0.

2. On factorise par e^n dans le logarithme. On obtient

$$\begin{aligned} u_n &= e^{-\sqrt{n}} \ln(e^n(1 + e^{-n} + ne^{-n})) \\ &= e^{-\sqrt{n}} n + e^{-\sqrt{n}} \ln(1 + e^{-n} + ne^{-n}) \\ &= e^{-\sqrt{n} + \ln n} + e^{-\sqrt{n}} \ln(1 + e^{-n} + ne^{-n}). \end{aligned}$$

On va maintenant composer les limites... Par comparaison des fonctions logarithmes et puissances au voisinage de l'infini, on sait que $1 + e^{-n} + ne^{-n}$ tend vers 1. Donc $\ln(1 + e^{-n} + ne^{-n})$ tend vers 0. De même, $-\sqrt{n}$ tend vers $-\infty$ et donc $e^{-\sqrt{n}}$ tend vers 0. Enfin, on sait aussi que $-\sqrt{n} + \ln n$ tend vers $-\infty$ et donc $e^{-\sqrt{n} + \ln n}$ tend vers 0. On en déduit que la suite (u_n) converge vers 0.

3. On utilise des propriétés fonctionnelles du logarithme, puis on factorise par \sqrt{n} dans le logarithme. Il vient

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n} \ln(\sqrt{n} + 1) - \sqrt{n} \ln(\sqrt{n} - 1) \\ &= \sqrt{n} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \ln(\sqrt{n}) \right) - \sqrt{n} \left(\ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \ln(\sqrt{n}) \right) \\ &= \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} + \frac{\ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)}{-\frac{1}{\sqrt{n}}}. \end{aligned}$$

Maintenant, puisque $\frac{\ln(1+x)}{x}$ tend vers 1 quand x tend vers 0 (dérivée de la fonction logarithme !), on en déduit que (u_n) converge vers 2.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Posons $f(x) = x - \ln(1+x)$. On a $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geq 0$ pour $x \geq 0$. La fonction f est donc croissante sur $[0, +\infty[$. En particulier, on a $f(x) \geq f(0) = 0$, ce qui donne la première inégalité $\ln(1+x) \leq x$. De même, on pose $g(x) = (x - x^2/2) - \ln(1+x)$. g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et on a $g'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x} = \frac{-x^2}{1+x} \leq 0$ pour $x \geq 0$. La fonction g est donc décroissante sur $[0, +\infty[$ et on a $g(x) \leq g(0) = 0$ pour $x \geq 0$, ce qui donne l'autre inégalité $x - x^2/2 \leq \ln(1+x)$.

2. On a, puisque $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$,

$$v_n = \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) + \ln \left(1 + \frac{2}{n^2} \right) + \dots + \ln \left(1 + \frac{n}{n^2} \right).$$

On utilise ensuite l'inégalité $\ln(1+x) \leq x$ pour trouver

$$\begin{aligned} v_n &\leq \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \\ &\leq \frac{1}{n^2} (1 + 2 + \dots + n) \\ &\leq \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &\leq \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

où on a utilisé $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$. Pour l'autre inégalité, on procède de façon identique en utilisant cette fois $\ln(1+x) \geq x - x^2/2$. On trouve

$$v_n \geq \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} - \left(\frac{1^2}{2n^4} + \frac{2^2}{2n^4} + \dots + \frac{n^2}{2n^4} \right)$$

La première partie a déjà été calculée auparavant. Pour la seconde, on utilise le rappel de l'énoncé.

$$\begin{aligned} v_n &\geq \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2n^4} (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) \\ &\geq \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2n^4} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &\geq \frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}. \end{aligned}$$

3. On sait que $(n+1)/(2n) \rightarrow 1/2$ tandis que $(n+1)(2n+1)/(12n^3) \rightarrow 0$ (quotient d'un polynôme de degré 2 et d'un polynôme de degré 3). (v_n) est donc encadré par deux suites qui tendent toutes deux vers $1/2$. Par le théorème d'encadrement des limites (ou théorème des gendarmes), (v_n) converge elle-même vers $1/2$.

4. On a $u_n = \exp(v_n)$. Par le théorème de composition des limites, (u_n) est convergente, de limite $\exp(1/2)$.

Correction de l'exercice 5 ▲

1. Il suffit d'étudier les deux suites extraites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) . En effet, on a

$$x_{2n} = \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) \rightarrow 1$$

alors que

$$x_{2n+1} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2n+1}\right) \rightarrow -1.$$

(x_n) admet deux suites extraites qui convergent vers des limites différentes. Elle est divergente.

2. C'est une simple application de la formule du binôme. En effet,

$$(3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^{n-k} \left((\sqrt{5})^k + (-1)^k (\sqrt{5})^k \right).$$

Or, si $k = 2p$ est pair,

$$(\sqrt{5})^k + (-1)^k (\sqrt{5})^k = 2 \times 5^p$$

qui est un entier pair. Si k est impair,

$$(\sqrt{5})^k + (-1)^k (\sqrt{5})^k = 0$$

qui est aussi un entier pair. $(3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$ est donc la somme d'entiers pairs, c'est un entier pair. D'après la question précédente, il existe un entier k tel que

$$(3 + \sqrt{5})^n \pi = 2k\pi - (3 - \sqrt{5})^n \pi.$$

On en déduit que

$$\sin\left(\left(3 + \sqrt{5}\right)^n \pi\right) = -\sin\left(\left(3 - \sqrt{5}\right)^n \pi\right).$$

Or, il est facile de vérifier que $|3 - \sqrt{5}| < 1$ et donc que $(3 - \sqrt{5})^n$ tend vers 0. Par composition des limites, il en est de même de $\sin\left(\left(3 - \sqrt{5}\right)^n \pi\right)$ et donc de $\sin\left(\left(3 + \sqrt{5}\right)^n \pi\right)$.

3. C'est une simple application de la formule du binôme. En effet,

$$(3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^{n-k} \left((\sqrt{5})^k + (-1)^k (\sqrt{5})^k \right).$$

Or, si $k = 2p$ est pair,

$$(\sqrt{5})^k + (-1)^k (\sqrt{5})^k = 2 \times 5^p$$

qui est un entier pair. Si k est impair,

$$(\sqrt{5})^k + (-1)^k (\sqrt{5})^k = 0$$

qui est aussi un entier pair. $(3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$ est donc la somme d'entiers pairs, c'est un entier pair.

4. D'après la question précédente, il existe un entier k tel que

$$(3 + \sqrt{5})^n \pi = 2k\pi - (3 - \sqrt{5})^n \pi.$$

On en déduit que

$$\sin\left(\left(3 + \sqrt{5}\right)^n \pi\right) = -\sin\left(\left(3 - \sqrt{5}\right)^n \pi\right).$$

Or, il est facile de vérifier que $|3 - \sqrt{5}| < 1$ et donc que $(3 - \sqrt{5})^n$ tend vers 0. Par composition des limites, il en est de même de $\sin\left(\left(3 - \sqrt{5}\right)^n \pi\right)$ et donc de $\sin\left(\left(3 + \sqrt{5}\right)^n \pi\right)$.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. P_n , qui est évidemment continue, est également strictement croissante sur \mathbb{R}_+ comme somme de fonctions strictement croissantes sur \mathbb{R}_+ . De plus, $P_n(0) = -1$ et $\lim_{+\infty} P_n = +\infty$. P_n réalise donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[-1, +\infty[$, et comme 0 est élément de $[-1, +\infty[$, il existe un unique $u_n \in [0, +\infty[$ tel que $P(u_n) = 0$.

2. On a

$$P_{n+1}(u_n) = P_n(u_n) + u_n^{n+1} \geq 0 = P_{n+1}(u_{n+1}).$$

Puisque P_n est croissante, on en déduit que $u_n \geq u_{n+1}$.

3. Remarquons que, pour $x \in]0, 1[$, on a

$$P_n(x) = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x} - 1 = \frac{2x - 1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

En particulier, on a $P_n(1/2) \leq 0$, et donc, puisque P_n est croissante, on en déduit $u_n \geq 1/2$ pour tout n .

4. Soit $\rho \in]1/2, 1[$. Alors, pour tout n assez grand, d'après l'écriture précédente de P_n , $P_n(\rho) \geq 0$ puisque le numérateur converge vers $2\rho - 1 > 0$.

5. Ainsi, toujours par croissance de P_n , il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq \rho.$$

Ceci prouve exactement que (u_n) converge vers $1/2$.

Correction de l'exercice 7 ▲

1. Supposons que (u_n) converge, disons vers a . Alors, on a

$$\cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta).$$

Puisque $\sin(\theta) \neq 0$, on voit que (v_n) est aussi convergente, et que sa limite notée b vérifie

$$a = a\cos(\theta) - b\sin(\theta).$$

Réciproquement, si (v_n) converge vers b , on écrit cette fois

$$\sin((n+1)\theta) = \sin(n\theta)\cos(\theta) + \cos(n\theta)\sin(\theta).$$

Toujours puisque $\sin(\theta) \neq 0$, on en déduit que (u_n) converge vers a , avec

$$b = b\cos(\theta) + a\sin(\theta).$$

2. On suppose toujours que (u_n) converge vers a et donc que (v_n) converge vers b . On sait que a et b vérifient les relations

$$a = a\cos(\theta) - b\sin(\theta)$$

$$b = b\cos(\theta) + a\sin(\theta).$$

Puisque $\cos(\theta) \neq 1$, on en déduit

$$a = \frac{-b\sin(\theta)}{1 - \cos(\theta)} \text{ et } b = \frac{a\sin(\theta)}{1 - \cos(\theta)}$$

ce qui entraîne encore

$$a = \frac{-a\sin^2(\theta)}{(1 - \cos(\theta))^2}$$

qui est équivalent à

$$a \left(1 + \frac{\sin^2(\theta)}{(1 - \cos \theta)^2} \right) = 0.$$

Ceci entraîne que $a = 0$ puisque le second terme du produit est supérieur ou égal à 1. Mais alors, on obtient aussi $b = 0$. Mais d'autre part, le théorème de Pythagore nous donne une troisième relation concernant a et b :

$$a^2 + b^2 = 1.$$

Ceci est incompatible avec $a = b = 0$ et donc les suites (u_n) et (v_n) sont divergentes.

Correction de l'exercice 8 ▲

1. On a $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$.

2. On va prouver par récurrence sur $n \geq 1$ que $\sqrt{n} \leq u_n \leq \sqrt{2n}$. C'est clair pour $n = 1$. Si c'est vrai au rang $n - 1$, avec $n \geq 2$, alors :

$$\sqrt{n + \sqrt{n-1}} \leq u_n \leq \sqrt{n + \sqrt{2(n-1)}} \leq \sqrt{n + \sqrt{2n}}.$$

Mais, clairement on a $\sqrt{n} \leq \sqrt{n + \sqrt{n-1}}$ d'une part et

$$\left(\sqrt{n + \sqrt{2n}} \right)^2 = n + \sqrt{2n}.$$

Or,

$$2n - (n + \sqrt{2n}) = n - \sqrt{2n} = \sqrt{n}(\sqrt{n} - \sqrt{2}) \geq 0$$

et donc

$$\left(\sqrt{n + \sqrt{2n}} \right)^2 \leq 2n.$$

Par croissance de la fonction racine carrée sur $[0, +\infty[$, on obtient

$$\sqrt{n + \sqrt{2n}} \leq \sqrt{2n},$$

ce qui prouve l'inégalité demandée au rang n .

3. On repart de l'inégalité trouvée dans la preuve de la question précédente, à savoir

$$\sqrt{n} \leq u_n \leq \sqrt{n + \sqrt{2(n-1)}}$$

qui se traduit en

$$1 \leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2(n-1)}}{n}}.$$

D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\frac{u_n}{\sqrt{n}}$ converge vers 1.

Correction de l'exercice 9 ▲

1. On met tout au même dénominateur, et on procède par identification :

$$\frac{a}{k-1} + \frac{b}{k+1} = \frac{(a+b)k + (a-b)}{k^2 - 1}.$$

On cherche donc a et b de sorte que

$$\begin{cases} a+b &= 0 \\ a-b &= 1 \end{cases}$$

On en déduit $a = 1/2$ et $b = -1/2$.

2. La somme est télescopique :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) \end{aligned}$$

soit

$$u_n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

On en déduit que (u_n) converge vers $\frac{3}{4}$.

3. L'idée est de factoriser $k^2 + 3k + 2 = (k+1)(k+2)$. On cherche donc a et b tels que

$$\frac{1}{k^2 + 3k + 2} = \frac{a}{k+1} + \frac{b}{k+2}.$$

On trouve $a = 1$ et $b = -1$. On en déduit que

$$v_n = 1 - \frac{1}{n+2}$$

et donc (v_n) converge vers 1.

Correction de l'exercice 10 ▲

Multipliant la différence de deux racines par la quantité conjuguée, on trouve

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

On somme alors ces inégalités, et les termes à gauche se télescopent :

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{1}) \leq u_n.$$

Par le théorème de comparaison, on en déduit que (u_n) diverge vers $+\infty$.

Correction de l'exercice 11 ▲

1. On a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$ et donc la suite (u_n) est croissante.

2. On a

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Or, $0 < n(n+1) \leq (n+1)^2$ et donc en passant à l'inverse, on trouve bien

$$\frac{1}{n(n+1)} \geq \frac{1}{(n+1)^2}.$$

3. Pour $n \geq 1$, notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété " $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ ". Nous allons prouver par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$. Initialisation : $\mathcal{P}(1)$ est vraie puisque $u_1 = 1 = 2 - \frac{1}{1}$. Hérédité : soit $n \geq 1$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \frac{1}{(n+1)^2} \\ &\leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \\ &\leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} && \leq 2 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée. Conclusion : par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout entier $n \geq 1$.

4. De la question précédente, on déduit que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq 2$. La suite (u_n) est donc croissante et majorée par 2. Elle est convergente !

Correction de l'exercice 12 ▲

Il suffit de remarquer que, pour tout $k \leq 2n$, on a

$$\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}.$$

Il vient

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Or, la suite (H_n) est croissante. Elle ne peut donc avoir que deux comportements : ou bien elle converge vers une limite l , ou bien elle tend vers $+\infty$. Mais si elle converge vers l , alors, par passage à la limite dans l'inégalité précédente, on trouve

$$0 = l - l \geq \frac{1}{2},$$

ce qui est bien sûr impossible. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$.

Correction de l'exercice 13 ▲

1. Pour $n \geq 1$, on va majorer u_n . En effet, pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on a $n^\alpha + k^\alpha \geq n^\alpha$. On en déduit

$$0 \leq u_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^\alpha} = n^{1-\alpha}.$$

Par le théorème d'encadrement, et comme $n^{1-\alpha} \rightarrow 0$, on a $u_n \rightarrow 0$.

2. On va cette fois minorer u_n . En effet, pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on a $n^\alpha + k^\alpha \leq 2n^\alpha$. On en déduit

$$u_n \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n^\alpha} \geq \frac{n^{1-\alpha}}{2}.$$

Comme $n^{1-\alpha} \rightarrow +\infty$, on en déduit que $u_n \rightarrow +\infty$.

3. On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0.$$

Ainsi, (u_n) est croissante. De plus, (u_n) est majorée par 1 d'après la première question (cas $\alpha = 1$). Donc (u_n) est convergente.

4. Il suffit d'étudier les fonctions $f(x) = x - \ln(1+x)$ et $g(x) = \ln(1-x) - x$. On peut aussi utiliser, pour ceux qui savent, la concavité de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$.

5. On applique le résultat de la question précédente à $x = \frac{1}{n+k}$. Il vient

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n+k}\right) \leq \frac{1}{n+k} \leq -\ln\left(1 - \frac{1}{n+k}\right).$$

On somme ces inégalités pour k allant de 1 à n et on utilise les propriétés du logarithme :

$$\ln\left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{n+k}\right)\right) \leq u_n \leq -\ln\left(\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{n+k}\right)\right).$$

Mais,

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{n+k}\right) = \prod_{k=1}^n \frac{n+k+1}{n+k} = \frac{2n+1}{n+1}.$$

De même,

$$\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{n+k}\right) = \prod_{k=1}^n \frac{n+k-1}{n+k} = \frac{n}{2n}.$$

On en déduit que

$$\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leq u_n \leq -\ln\left(\frac{n}{2n}\right) = \ln\left(\frac{2n}{n}\right).$$

On fait tendre n vers l'infini. Par le théorème des gendarmes, on en déduit que (u_n) converge vers $\ln 2$.

Correction de l'exercice 14 ▲

1. Il est clair que (u_n) est croissante puisque $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ et que $v_n - u_n \rightarrow 0$. La seule difficulté est de prouver que (v_n) est décroissante. Pour cela, on remarque que

$$\begin{aligned}v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\&= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} \\&= \frac{-1}{n(n+1)^2} \leq 0.\end{aligned}$$

2. Là encore, il suffit d'appliquer la définition, même si c'est plus difficile techniquement. On a

$$\begin{aligned}u_n &= \frac{1}{1+n} + \frac{1}{2+n} + \dots + \frac{1}{n+n} \\u_{n+1} &= \frac{1}{1+(n+1)} + \dots + \frac{1}{(n-1)+(n+1)} + \frac{1}{n+(n+1)} + \frac{1}{(n+1)+(n+1)} \\u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \geq 0.\end{aligned}$$

De même,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} = \frac{-3n-2}{n(2n+1)(2n+2)} \leq 0$$

et enfin

$$v_n - u_n = \frac{1}{n}$$

qui tend bien vers 0. On peut aussi remarquer, pour cela, qu'avec un changement d'indices $l = k + n$, on a

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Correction de l'exercice 15 ▲

On va montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes. En effet, on a

$$u_p - u_{p-2} = (-1)^p \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p} \right) = \frac{(-1)^{p+1}}{p(p+1)}.$$

Ainsi, $u_{2n} - u_{2n-2} \leq 0$ et $u_{2n+1} - u_{2n-1} \geq 0$. La suite (u_{2n}) est décroissante et la suite (u_{2n+1}) est croissante. De plus, on a

$$u_{2n+1} - u_{2n} = \frac{-1}{2n+2}$$

ce qui entraîne que $u_{2n+1} - u_{2n} \rightarrow 0$. Les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont donc adjacentes : elles convergent vers la même limite l . Il en est de même de (u_n) .

Correction de l'exercice 16 ▲

1. Il suffit d'appliquer la définition : pour tout $n \geq 2$,

$$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n!} > 0, \quad v_n - v_{n-1} = \frac{-1}{n(n-1)n!} < 0, \quad v_n - u_n = \frac{1}{n \times n!}$$

et $\frac{1}{n \times n!}$ tend vers 0. Les suites sont donc adjacentes, on note e leur limite commune.

2. Puisque la suite (u_n) est strictement croissante, que (v_n) est strictement décroissante, et que (u_n) et (v_n) sont adjacentes de limite e , on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n < e < v_n.$$

Il suffit de multiplier par $n!$ pour prouver l'inégalité demandée.

3. Imaginons que e soit rationnel, et écrivons $e = \frac{p}{q}$ avec p, q entiers premiers entre eux. On sait que

$$q!u_q < q!e < q!u_q + \frac{1}{q}.$$

D'autre part, on remarque que :

$q!u_q$ est un entier. En effet, pour tout $k \leq q$, $q!/k!$ est un entier ; $q!\frac{p}{q}$ est un entier.

Notons $m = q!u_q$ et $s = q!\frac{p}{q}$. On a donc

$$m < s < m + \frac{1}{q} \leq m + 1.$$

Ainsi, s est un entier strictement compris entre les entiers consécutifs m et $m + 1$: c'est absurde ! Ajoutons que l'on peut prouver que e défini par ces suites est bien $\exp(1)$.

4. $q!u_q$ est un entier. En effet, pour tout $k \leq q$, $q!/k!$ est un entier ;

5. $q!\frac{p}{q}$ est un entier.

6.

```
import math
def approx(ecart):
    n=1
    u=2
    v=3
    while ((v-u)>ecart):
        n=n+1
        u=u+1/math.factorial(n)
        v=v+1/(n*math.factorial(n))
    return u,v
```

Correction de l'exercice 17 ▲

1. On a, pour tout $n \geq 1$,

$$u_n - v_n = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = 2 \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Ainsi, la suite $(u_n - v_n)$ tend vers 0.

2. Calculons, pour $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n$. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} \\ &= \frac{1 - 2(n+1) + 2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{-2n - 1 + 2\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n+1}}. \end{aligned}$$

Reste à étudier le signe de $-2n - 1 + 2\sqrt{n(n+1)}$. Mais, puisque tout est positif,

$$2\sqrt{n(n+1)} \leq 2n + 1 \iff 4n(n+1) \leq (2n+1)^2 \iff 4n^2 + 4n \leq 4n^2 + 4n + 1.$$

Cette dernière propriété étant satisfaite, on en conclut que (u_n) est décroissante. Exactement la même méthode prouve que (v_n) est croissante.

3. D'après les deux questions précédentes, (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite ℓ . Mais puisque (u_n) est décroissante, on sait en outre que $\ell \leq u_1 = -1$.

4. On a

$$\frac{u_n}{2\sqrt{n}} = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}}{2\sqrt{n}} - 1.$$

De plus, d'après la question précédente, $\frac{u_n}{2\sqrt{n}}$ tend vers 0. Ainsi, $\frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}}{2\sqrt{n}}$ tend vers 1.

Correction de l'exercice 18 ▲

1. Clairement, f est croissante sur $[0, +\infty[$, elle vaut $3/16$ en 0 et a pour limite $+\infty$ en $+\infty$. En calculant le discriminant du polynôme de degré 2 $f(x) - x$, on obtient qu'il admet deux racines qui sont $1/4$ et $3/4$. Autrement dit, on a $f(x) - x = (x - 1/4)(x - 3/4)$ ce qui implique $f(x) \geq x$ si $x \leq 1/4$ ou $x \geq 3/4$, et $f(x) \leq x$ si $x \in [1/4, 3/4]$. Enfin, puisque f est continue, les limites possibles de (u_n) vérifient l'équation $f(l) = l$. Ce sont donc $1/4$ et $3/4$.

2. D'après le tableau de variations de f , l'intervalle $[0, 1/4]$ est stable par f . On en déduit par une récurrence immédiate que $u_n \in [0, 1/4]$ pour tout entier n . De plus, on sait que $f(x) \geq x$ pour $x \in [0, 1/4]$. Appliquant cette inégalité à $x = u_n$, on trouve que $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n . La suite (u_n) est croissante, majorée. Elle converge, et sa limite est élément de $\{1/4, 3/4\}$. De plus, puisque $u_n \in [0, 1/4]$ pour tout n , la limite est aussi élément de $[0, 1/4]$. La suite (u_n) converge donc vers $1/4$.

3. On raisonne de façon analogue. L'intervalle $[1/4, 3/4]$ est stable par f , et donc $u_n \in [1/4, 3/4]$ pour tout n . Puisque $f(x) \leq x$ sur $[1/4, 3/4]$, on sait que $u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n$ pour tout n . La suite (u_n) est donc décroissante et minorée, donc elle converge. Pour déterminer sa limite, il faut être un peu plus prudent. D'une part, si $u_0 = 3/4$, alors la suite est constante égale à $3/4$. D'autre part, si $u_0 < 3/4$, alors pour tout n on a

$$u_n \leq u_0.$$

Si on note l la limite de (u_n) , le passage à la limite dans l'inégalité précédente donne

$$l \leq u_0 < 3/4.$$

Puisque $l = 1/4$ ou $l = 3/4$, on en déduit que (u_n) converge vers $1/4$ si $u_0 \in [1/4, 3/4[$.

4. De même, l'intervalle $]3/4, +\infty[$ est stable par f . Ainsi, on prouve que $u_n \in]3/4, +\infty[$ pour tout entier n . De plus, puisque $f(x) \geq x$ sur $]3/4, +\infty[$, on en déduit que (u_n) est croissante. Si elle était majorée, elle serait convergente vers un certain réel l . Or, ce réel l devrait vérifier

$$3/4 < u_0 \leq l.$$

C'est impossible puisque $l = 1/4$ ou $l = 3/4$. Ainsi, (u_n) est croissante, non majorée, et donc (u_n) diverge vers $+\infty$.

Correction de l'exercice 19 ▲

1. Puisque $x \mapsto 2/x$ est décroissante, la fonction f est décroissante sur $[1, 3]$. De plus, $f(1) = 3$ et $f(3) = 5/3 > 1$. L'intervalle $[1, 3]$ est bien stable par f , ce qui entraîne en particulier que la suite (u_n) est bien définie et que $u_n \in [1, 3]$ pour tout entier n .

2. Puisque $v_{n+1} = u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n})$, on pose $g = f \circ f$ qui laisse bien sûr stable l'intervalle $[1, 3]$. Puisque la composée de deux fonctions décroissantes est une fonction croissante, g est croissante sur $[1, 3]$. De plus, on a

$$u_1 = 3, \quad u_2 = 5/3 > u_0$$

et donc $v_1 \geq v_0$. On prouve alors par récurrence sur n que la suite (v_n) est croissante, ie que pour tout n on a $v_{n+1} \geq v_n$. C'est vrai pour $n = 0$ et si c'est vrai au rang n , il suffit d'utiliser la croissance de g sur $[1, 3]$ pour démontrer que

$$1 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq 3 \implies v_{n+1} = g(v_n) \leq g(v_{n+1}) = v_{n+2}.$$

3. Remarquons ensuite que $w_n = f(v_n)$. Ainsi, de la décroissance de f sur $[1, 3]$ et de l'inégalité $v_n \leq v_{n+1}$, on déduit l'inégalité

$$w_n = f(v_n) \geq f(v_{n+1}) = w_{n+1}.$$

Autrement dit, (w_n) est décroissante.

4. Puisque (v_n) est croissante et majorée et que (w_n) est décroissante et minorée, on en déduit que ces deux suites sont convergentes. Leur limite respective est un élément de $[1, 3]$ vérifiant l'équation $g(x) = x$. Or,

$$g(x) = 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{3x + 2}{x + 2}.$$

L'équation $g(x) = x$ est donc équivalente à

$$x^2 - x - 2 = 0 \iff x = 2 \text{ ou } x = -1.$$

La seule solution dans $[1, 3]$ est 2, donc les deux suites convergent vers la même limite, à savoir 2.

5. Puisque (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent toutes deux vers 2, on en déduit que (u_n) est elle aussi convergente vers 2.

Correction de l'exercice 20 ▲

1. On vérifie facilement que f est décroissante sur $[0, 1]$. Puisque $f(1) = 0$ et que $f(0) = 1$, on a $f([0, 1]) \subset [0, 1]$ et $[0, 1]$ est un intervalle stable par f .

2. On commence par remarquer que $[0, 1]$ est lui aussi stable par $g = f \circ f$. La composée de deux fonctions décroissantes étant une fonction croissante, g est croissante.

3. On commence par calculer g : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$g(x) = (1 - (1 - x)^2)^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2.$$

L'équation $g(x) = x$ est donc équivalente à

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - x = 0.$$

0 et 1 sont des solutions évidentes de cette équation. On peut donc factoriser par $x(x - 1)$ et on trouve

$$x(x - 1)(x^2 - 3x + 1) = 0.$$

En calculant le discriminant de $x^2 - 3x + 1$, on trouve que l'équation $g(x) = x$ admet 4 solutions qui sont

$$x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 1, x_3 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \simeq 0,38.$$

4. La fonction g est croissante sur $[0, 1]$, $[0, 1]$ est stable par g et $v_0 \in [0, 1]$ donc (v_n) est monotone. De plus, on a $v_1 = g(v_0) = 9/16 > 1/2$. La suite (v_n) est croissante. Elle est majorée par 1. Elle est donc convergente, et sa limite ℓ appartient à $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ et à $[1/2, 1]$. La seule possibilité est $\ell = 1$ et donc (v_n) converge vers 1. Puisque $w_n = f(v_n)$ la suite (w_n) converge vers $f(1) = 0$.

5. Les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers deux limites différentes : la suite (u_n) diverge.

Correction de l'exercice 21 ▲

1. On pose $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Il est facile de voir que f est décroissante sur $]0, 1[$, puis croissante sur $[1, +\infty[$, avec $f([1, +\infty[) = [2, +\infty[$. D'autre part, $f(]0, 1[) = ([2, +\infty[)$. Autrement dit, quelle que soit la valeur de départ $u_0 > 0$, on a toujours $u_1 \geq 2$, et comme cet intervalle est stable par f , $u_n \geq 2$ pour tout $n \geq 1$. Maintenant, $f(x) \geq x$ pour $x \geq 1$, ce qui prouve que $u_{n+1} \geq u_n$ pour $n \geq 1$, donc que la suite (u_n) est croissante. Elle ne peut pas être majorée car sinon elle serait convergente, et sa limite devrait vérifier $\ell = \ell + \frac{1}{\ell}$, équation qui n'a pas de solutions dans $[0, +\infty[$. On en déduit que (u_n) diverge vers $+\infty$.

2. On pose, pour $x \geq 0$, $f(x) = \sqrt{1 + x}$. f est une fonction croissante sur \mathbb{R}_+ , qui vérifie $f([0, +\infty[) = [1, +\infty[$. De plus, l'équation

$$f(x) = x \implies x + 1 = x^2$$

admet une unique racine dans $[1, +\infty[$ qui est $\alpha := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. L'étude du signe de $f(x) - x$ montre que $f(x) \geq x$ si $x \in [0, \alpha]$ et $f(x) \leq x$ si $x \geq \alpha$. Ainsi, l'intervalle $[0, \alpha]$ est stable par f . Puisque $u_0 \in [0, \alpha]$, ceci implique que (u_n) est bien définie et que $u_n \in [0, \alpha]$ pour tout n . De plus, puisque $f(x) \geq x$ dans l'intervalle $[0, \alpha]$, $u_{n+1} = f(u_n) \geq u_n$ et donc la suite (u_n) est croissante. Elle est majorée, donc convergente. Sa limite doit vérifier l'équation $f(x) = x$ et appartenir à $[0, \alpha]$. (u_n) converge donc vers $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Dans le cas $u_0 = 2$, on peut refaire la même étude en remplaçant l'intervalle $[0, \alpha]$ par l'intervalle $[\alpha, +\infty[$. Puisque $f(x) \leq x$ sur cet intervalle, on obtient que (u_n) est cette fois décroissante. Elle va donc converger (car elle est aussi minorée), toujours vers α .

Correction de l'exercice 22 ▲

1. On pose $f(x) = (1-x)^2$. Une étude rapide de la fonction f montre qu'elle est décroissante sur $[0, 1]$, avec $f(1) = 0$ et $f(0) = 1$. En particulier, $[0, 1]$ est un intervalle stable par f , et $u_0 \in [0, 1]$. Par récurrence immédiate, $u_n \in [0, 1]$ pour tout n . La décroissance de f nous invite à étudier les suites (v_n) et (w_n) définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. En posant $g = f \circ f$, on a $v_{n+1} = g(v_n)$ et $w_{n+1} = g(w_n)$. De plus, la fonction g , définie comme composée de deux fonctions décroissantes, est une fonction croissante. Calculons les premiers termes de (u_n) :

$$u_0 = 1/2, u_1 = 1/4, u_2 = 9/16, \dots$$

En particulier, $v_0 = 1/2 \leq v_1 = 9/16$. Puisque g est croissante, on prouve par une récurrence immédiate que la suite (v_n) est croissante. De plus, elle est majorée par 1, donc elle est convergente. Puisque g est continue, les limites possible de (v_n) vérifient l'équation

$$l = g(l) \iff l = (1 - (1-l)^2)^2 \iff l^4 - 4l^3 + 4l^2 - l = 0.$$

0 et 1 sont racines évidentes, on peut factoriser par $l(l-1)$ et on trouve :

$$l(l-1)(l^2 - 3l + 1) = 0.$$

On calcule le discriminant du polynôme de second degré :

$$\Delta = 9 - 4 = 5.$$

Les solutions de l'équation $g(l) = l$ sont donc

$$\begin{aligned} l_0 &= 0 \\ l_1 &= 1 \\ l_2 &= \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1 \\ l_3 &= \frac{3-\sqrt{5}}{2} \simeq 0,38. \end{aligned}$$

Maintenant, puisque $v_0 \leq v_n \leq 1$, la limite l de la suite (v_n) vérifie $1/2 \leq l \leq 1$. Parmi les solutions trouvées précédemment, seule $l_1 = 1$ convient : (v_n) converge vers 1. De même, on étudie (w_n) en remarquant que $w_1 \leq w_0$ (par exemple, en appliquant f à l'inégalité $v_1 \geq v_0$). On prouve de la même façon que (w_n) est décroissante et que sa limite l' vérifie $0 \leq l' \leq 1/4$. Comme l' est aussi un des l_i , (w_n) converge vers 0. Ainsi, on a prouvé que (u_n) n'était pas convergente, et que (en langage plus sophistiqué), elle admettait exactement deux valeurs d'adhérence qui sont 0 et 1.

2. Posons $f(x) = \sqrt{1-x}$. f est décroissante sur $]0, 1[$, avec $f(1) = 0$ et $f(0) = 1$. Ainsi, l'intervalle $[0, 1]$ est stable par f , donc (u_n) est bien définie avec $u_n \in [0, 1]$ pour tout $n \geq 0$. De plus, l'étude du signe de $f(x) - x$ conduit, en utilisant la quantité conjuguée, à

$$f(x) - x = \frac{1-x-x^2}{\sqrt{1-x}+x}.$$

Or, $1-x-x^2 = -(x-\alpha)(x-\beta)$ avec

$$\alpha = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} < 0 \text{ et } \beta = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \in [0, 1].$$

Puisque f est décroissante, on est invité à poser $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$, et $g = f \circ f$, de sorte que g est croissante et $v_{n+1} = g(v_n)$, $w_{n+1} = g(w_n)$. Puisque g est croissante, il est facile de prouver que les suites (v_n) et (w_n) vont être monotones. Comme $v_1 \simeq 0,53 > v_0$, on voit que (v_n) est croissante. En outre, puisque $v_0 \leq \beta$ et que $g(\beta) = \beta$, on prouve par récurrence sur n que $v_n \in [v_0, \beta]$. La suite (v_n) est donc convergente, de limite a appartenant à $[1/2, \beta]$. Pour la suite (w_n) , on sait immédiatement qu'elle est décroissante, car $w_n = f(v_n)$, (v_n)

est croissante et f est décroissante. De plus, $w_0 \simeq 0,7 > \beta$. Comme pour la suite (v_n) on prouve par récurrence que $w_n \in [\beta, w_0]$. Ainsi, la suite (w_n) converge vers une limite b appartenant à $[\beta, w_0]$. On va maintenant prouver que $a = b = \beta$. Pour cela, on résout l'équation $g(x) = x$. Elle entraîne, en mettant au carré,

$$1 - \sqrt{1-x} = x^2 \implies (1-x^2)^2 = (1-x).$$

Cette dernière équation a pour solution 1, ou alors les réels x tels que

$$(1-x)(1+x)^2 = 1 \iff x - x^2 - x^3 = 0.$$

Les solutions de cette dernière équation sont $0, \alpha, \beta$ et donc les points fixes de g sont parmi $0, \alpha, \beta$ et 1. Or, seul β convient puisque c'est le seul à appartenir aux intervalles $[1/2, \beta]$ et $[\beta, w_0]$. Donc $a = b = \beta$ et la suite (u_n) converge vers β .

Correction de l'exercice 23 ▲

On pose $u_n = x_n + iy_n$ avec $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. On a alors

$$x_{n+1} = \frac{3x_n - 2x_n}{5} = \frac{x_n}{5} \text{ et } y_{n+1} = \frac{3y_n + 2y_n}{5} = y_n.$$

On en déduit que $x_n \rightarrow 0$ tandis que $y_n = y_0$. Autrement dit, la suite (u_n) converge vers $iy_0 = i\Im(u_0)$.

Correction de l'exercice 24 ▲

1. L'équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = 0$, de racines 1 et 2. La solution générale est donc de la forme

$$u_n = a + b2^n.$$

En introduisant la valeur de u_0 et u_1 , on trouve $a = 1$ et $b = 2$, soit $u_n = 1 + 2^{n+1}$.

2. L'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 4 = 0$, dont 2 est racine double. La solution générale est donc de la forme

$$u_n = (a + bn)2^n.$$

u_0 donne $a = 1$ et u_1 donne $b = -1$. Ainsi, $u_n = (1 - n)2^n$.

3. L'équation caractéristique est $r^2 - r + 1 = 0$. Son discriminant est -3 , donc ses racines sont $(1 - i\sqrt{3})/2 = e^{-i\pi/3}$ et $(1 + i\sqrt{3})/2 = e^{i\pi/3}$. La solution générale est donc de la forme

$$u_n = a \cos(n\pi/3) + b \sin(n\pi/3).$$

u_0 donne $a = 1$ et u_1 donne $b = \sqrt{3}$. Finalement, on trouve

$$u_n = \cos(n\pi/3) + \sqrt{3} \sin(n\pi/3) = 2 \cos((n-1)\pi/3).$$

Correction de l'exercice 25 ▲

1. L'équation $f(z) = z$ est équivalente à $cz^2 + dz = az + b$, donc à chercher les racines complexes d'un polynôme de degré 2. Il y en a une ou deux, suivant que le discriminant est nul ou non.

2. Remarquons d'abord que la condition $ad - bc \neq 0$ empêche f d'être constante. En effet, on a

$$f(z) = \frac{b}{d} \left(\frac{adz + bd}{bcz + bd} \right)$$

et si $ad = bc$, alors $f(z) = b/d$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Cette condition prise en compte, on a

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \frac{z_{n+1} - \alpha}{z_{n+1} - \beta} \\ &= \frac{f(z_n) - f(\alpha)}{f(z_n) - f(\beta)} \\ &= \frac{c\beta + d}{c\alpha + d} \times \frac{(az_n + b)(c\alpha + d) - (cz_n + d)(a\alpha + b)}{(az_n + b)(c\beta + d) - (cz_n + d)(a\beta + b)} \\ &= \lambda \frac{z_n - \alpha}{z_n - \beta} = \lambda w_n \end{aligned}$$

avec $\lambda = \frac{c\beta+d}{c\alpha+d}$. Dans le cas particulier $z_{n+1} = \frac{1}{1-z_n}$, les points fixes de f sont $(1+i\sqrt{3})/2 = -j^2$ et $(1-i\sqrt{3})/2 = -j$. (w_n) est donc une suite géométrique de raison $\lambda = j$. En particulier, elle est périodique de période 3. Or,

$$w_n = \frac{z_n + j^2}{z_n + j} \iff z_n = \frac{jw_n - j^2}{1 - w_n}$$

et donc z_n est aussi périodique de période 3. Puisque $z_1 = \frac{1}{1-i} \neq i$, on en déduit que (z_n) ne peut pas être convergente.

3. Puisqu'on sait que le discriminant est nul, on obtient que $\alpha = \frac{a-d}{2c}$. De plus, $(cz+d)(z-f(z))$ admet α comme racine double, et son coefficient dominant est c . On a donc

$$(cz+d)(z-f(z)) = c(z-\alpha)^2.$$

On en déduit que

$$f(z) - \alpha = (z - \alpha) \left(1 - \frac{c(z - \alpha)}{cz + d} \right) = \frac{(z - \alpha)(d + c\alpha)}{cz + d}.$$

Reste à exprimer $cz + d$ en fonction de $z - \alpha$. Il vient

$$cz + d = c(z - \alpha) + (d + c\alpha).$$

On en déduit que

$$\frac{1}{f(z) - \alpha} = \frac{1}{z - \alpha} + \frac{c}{d + c\alpha}.$$

Ainsi, la suite (w_n) est bien une suite arithmétique de raison $\frac{c}{d+c\alpha} = \frac{2c}{a+d}$. Pour l'application, on a bien que 1 est l'unique point fixe de f , et que $\frac{2c}{a+d} = 1/2$. La suite (w_n) définie par $w_n = \frac{1}{z_n - 1}$ est donc arithmétique de raison 1/2, et on a

$$w_n = \frac{n}{2} + w_0.$$

Ainsi, $(|w_n|)$ tend vers $+\infty$. Maintenant, on peut retrouver z_n à partir de w_n car

$$w_n = \frac{1}{z_n - 1} \iff z_n = 1 + \frac{1}{w_n}.$$

On en conclut que (z_n) converge vers 1.

Correction de l'exercice 26 ▲

Écrivons $u_1 = au_0^2 = au_0u_0$. Ainsi,

$$\frac{|u_1|}{|u_0|} = |au_0|.$$

On pose alors $k = |au_0|$ et on distingue deux cas :

1. Si $k < 1$, on commence par prouver par récurrence sur n que $|u_n| \leq |u_0|$. Ceci est vrai lorsque $n = 1$. De plus, on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = |au_n| \leq k$$

par hypothèse de récurrence, ce qui entraîne que $|u_{n+1}| \leq |u_n| \leq |u_0|$. Mais alors, revenant au quotient précédent, on a pour tout entier n

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = |au_n| \leq k$$

ce qui entraîne facilement par récurrence que $|u_n| \leq k^n |u_0|$ pour tout entier n . Ainsi, la suite converge vers 0.

2. Si $k \geq 1$, alors la même preuve, mais en inversant le sens des inégalités, montre que $|u_{n+1}| \geq |u_n|$, et donc la suite $(|u_n|)$ est croissante, et (u_n) ne peut pas converger vers zéro.

Correction de l'exercice 27 ▲

1. On a

$$x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{x_n^2 - y_n^2}{x_n + y_n} = x_n - y_n$$

et donc la suite $(x_n - y_n)$ est bien constante.

2. Le résultat de la question précédente entraîne en particulier que $y_n - x_n = y_0 - x_0$ et donc que $y_n \geq x_n$. Il est alors facile de démontrer que (x_n) est décroissante : en effet, on a

$$x_{n+1} \leq \frac{x_n^2}{2x_n} \leq \frac{x_n}{2}.$$

Ainsi, (x_n) est décroissante.

3. (x_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge. De plus, l'inégalité $0 \leq x_{n+1} \leq x_n/2$ prouve que $0 \leq x_n \leq x_0/2^n$. Ainsi, (x_n) converge vers 0. On en déduit que (y_n) converge vers $y_0 - x_0$.

Correction de l'exercice 28 ▲

1. On a

$$g \leq m \iff g^2 \leq m^2 \iff xy \leq \frac{x^2 + y^2}{4} + xy \iff x^2 + y^2 \geq 0.$$

Comme la dernière inégalité est toujours vérifiée, on a bien $g \leq m$. De même, on a

$$\begin{aligned} h \leq g &\iff \frac{g^2}{h^2} \geq 1 \\ &\iff \frac{xy}{4} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{xy} + \frac{1}{y^2} \right) \geq 1 \\ &\iff \frac{xy}{4x^2y^2} (y^2 + 2xy + x^2) \geq 1 \\ &\iff x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy \\ &\iff (x - y)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité étant toujours satisfaite, on a bien $h \leq g$ pour tous x, y positifs. De plus

$$\begin{aligned} \frac{g^2}{h} &= xy \times \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \\ &= \frac{x + y}{2} \\ &= m \end{aligned}$$

ce qui donne immédiatement $\sqrt{mh} = g$.

2. Prouvons par récurrence sur n que les suites u et v sont bien définies jusqu'à l'ordre n et que $0 < v_n \leq u_n$. C'est vrai au rang 0. Si c'est vrai au rang n , alors on en déduit que v_{n+1} et u_{n+1} sont bien définis, sont strictement positifs, et par la question précédente, que $v_{n+1} \leq u_{n+1}$. Puisque $v_n \leq u_n$, on sait que

$$u_{n+1} \leq \frac{u_n + u_n}{2} \leq u_n.$$

De même, on a

$$\frac{1}{v_{n+1}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{v_n} + \frac{1}{v_n} \right) \leq \frac{1}{v_n}$$

soit $v_{n+1} \geq v_n$. La suite (v_n) est donc croissante et la suite (u_n) est décroissante. On sait que (v_n) est croissante. De plus, on a pour chaque n , $v_n \leq u_n \leq u_0$. La suite (v_n) est donc majorée. Elle converge vers une limite notée l_1 . De même, la suite (u_n) est décroissante, et minorée par v_0 . Elle est donc convergente vers une limite notée l_2 . On passe ensuite à la limite dans la définition de la suite (u_n) :

$$l_2 = \frac{l_1 + l_2}{2}.$$

Ceci prouve que $l_1 = l_2$ et que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite, notée désormais l . On va utiliser, en utilisant les notations de la première question de l'exercice, que $\sqrt{mh} = g$. Notons G la moyenne géométrique de u_0 et v_0 . La remarque précédente nous dit que, pour chaque n , on a $\sqrt{u_n v_n} = G$. C'est en effet vrai au rang $n = 0$, et si c'est vrai au rang n , la propriété précédente nous dit que c'est vrai au rang $n + 1$. Passant à la limite, on trouve $\sqrt{l^2} = G$, ce qui est bien le résultat souhaité.

3. Prouvons par récurrence sur n que les suites u et v sont bien définies jusqu'à l'ordre n et que $0 < v_n \leq u_n$. C'est vrai au rang 0. Si c'est vrai au rang n , alors on en déduit que v_{n+1} et u_{n+1} sont bien définis, sont strictement positifs, et par la question précédente, que $v_{n+1} \leq u_{n+1}$.

4. Puisque $v_n \leq u_n$, on sait que

$$u_{n+1} \leq \frac{u_n + u_n}{2} \leq u_n.$$

De même, on a

$$\frac{1}{v_{n+1}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{v_n} + \frac{1}{v_n} \right) \leq \frac{1}{v_n}$$

soit $v_{n+1} \geq v_n$. La suite (v_n) est donc croissante et la suite (u_n) est décroissante.

5. On sait que (v_n) est croissante. De plus, on a pour chaque n , $v_n \leq u_n \leq u_0$. La suite (v_n) est donc majorée. Elle converge vers une limite notée l_1 . De même, la suite (u_n) est décroissante, et minorée par v_0 . Elle est donc convergente vers une limite notée l_2 . On passe ensuite à la limite dans la définition de la suite (u_n) :

$$l_2 = \frac{l_1 + l_2}{2}.$$

Ceci prouve que $l_1 = l_2$ et que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite, notée désormais l .

6. On va utiliser, en utilisant les notations de la première question de l'exercice, que $\sqrt{mh} = g$. Notons G la moyenne géométrique de u_0 et v_0 . La remarque précédente nous dit que, pour chaque n , on a $\sqrt{u_n v_n} = G$. C'est en effet vrai au rang $n = 0$, et si c'est vrai au rang n , la propriété précédente nous dit que c'est vrai au rang $n + 1$. Passant à la limite, on trouve $\sqrt{l^2} = G$, ce qui est bien le résultat souhaité.

Correction de l'exercice 29 ▲

1. Il suffit de remarquer que $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$ et de développer cette inégalité.

2. On remarque d'abord que les suites sont bien définies (en particulier, elles sont toujours positives). L'inégalité $u_n \geq v_n$ est une conséquence immédiate de la question précédente, avec $x = u_{n-1}$ et $y = v_{n-1}$. De plus, on a :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \leq \frac{u_n + u_n}{2} \leq u_n.$$

De même,

$$v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geq \sqrt{v_n v_n} = v_n.$$

3. On sait déjà que $u_{n+1} - v_{n+1} \geq 0$. De plus,

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + v_n - 2\sqrt{u_n v_n}}{2}.$$

Puisque $0 \leq v_n \leq u_n$ et par croissance de la fonction $\sqrt{\cdot}$, on a $\sqrt{u_n v_n} \geq v_n$. On en déduit que

$$u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{u_n + v_n - 2v_n}{2} = \frac{1}{2}(u_n - v_n).$$

4. De la relation précédente, on déduit par une récurrence immédiate que, pour tout entier naturel n , on a

$$0 \leq u_n - v_n \leq \frac{1}{2^n}(u_0 - v_0).$$

Ainsi, $(u_n - v_n)$ converge vers 0. On en déduit que (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes : elles convergent vers la même limite !

5. L'algorithme calcule les termes successifs des suites (u_n) et (v_n) jusqu'à ce que $u_n - v_n < \text{ecart}$. Par rapport à la définition des suites de l'exercice, on prend juste garde à ce qu'on est toujours $u_n \geq v_n$, même au

premier rang. On doit faire intervenir une variable supplémentaire pour le calcul successif des termes des suites (car on a une récurrence croisée). Codé sous Python, ceci donne : `import math def moyenne(a,b,ecart) : u=a v=b while ((u-v)>ecart) : w=u u=(u+v)/2 v=math.sqrt(w*v) return u,v`

Correction de l'exercice 30 ▲

Soit l la limite de (u_n) . Appliquons la définition d'une suite convergente avec $\varepsilon = 1/4$. Il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq n_0$, on a

$$|u_n - l| < 1/4.$$

On a alors, d'après l'inégalité triangulaire,

$$|u_n - u_{n_0}| \leq |u_n - l| + |l - u_{n_0}| \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, u_n et u_{n_0} sont des entiers relatifs dont la distance est inférieure à $1/2$: ils sont nécessairement égaux. On a démontré que pour $n \geq n_0$, $u_n = u_{n_0}$, c'est-à-dire que la suite est stationnaire.

Correction de l'exercice 31 ▲

Pas nécessairement ! Par exemple, prenons la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. (u_n) converge vers 0. Mais, $u_{2p} = \frac{1}{2p}$ et donc $\lfloor u_{2p} \rfloor = 0$, tandis que $u_{2p+1} = \frac{-1}{2p+1} \in]-1, 0[$ et donc $\lfloor u_{2p+1} \rfloor = -1$. La suite $(\lfloor u_n \rfloor)$ n'est donc pas convergente puisqu'elle admet deux suites extraites admettant des limites différentes.

Correction de l'exercice 32 ▲

On va montrer que (u_n) et (v_n) convergent toutes les deux vers 1. Procédons par l'absurde. Quitte à échanger les rôles joués par (u_n) et (v_n) , on peut supposer que (u_n) ne converge pas vers 1. On sait donc qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $N > 0$, il existe $n := n(N) \geq N$ avec $|u_n - 1| > \varepsilon$, soit, puisque $0 \leq u_n \leq 1$,

$$u_n < 1 - \varepsilon.$$

D'autre part, puisque $(u_n v_n)$ converge vers 1, on sait qu'il existe $N_1 > 0$ tel que, pour tout $n \geq N_1$, on a

$$1 - \varepsilon \leq u_n v_n.$$

Mais alors, pour un $n \geq N_1$ tel que $u_n < 1 - \varepsilon$, on a

$$1 - \varepsilon \leq u_n v_n \leq u_n < 1 - \varepsilon.$$

Ceci est absurde, ce qui achève la preuve du fait que (u_n) et (v_n) convergent vers 1. On aurait aussi pu (plus simplement) raisonner à partir du théorème d'encadrement, en remarquant que

$$u_n v_n \leq u_n \leq 1.$$

Correction de l'exercice 33 ▲

1. Par définition, il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq l + \varepsilon.$$

On a alors, pour tout $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{u_n}{u_{n-1}} \times \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \times \cdots \times \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \times u_{n_0} \\ &\leq (l + \varepsilon)^{n-n_0} u_{n_0}. \end{aligned}$$

D'après la question précédente, on a $0 \leq u_n \leq (l + \varepsilon)^{n-n_0} u_{n_0}$. Or, $(l + \varepsilon)^{n-n_0}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ puisque $0 < l + \varepsilon < 1$. Par le théorème d'encadrement, (u_n) tend vers 0.

2. Par définition, il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq l + \varepsilon.$$

On a alors, pour tout $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{u_n}{u_{n-1}} \times \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \times \cdots \times \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \times u_{n_0} \\ &\leq (l + \varepsilon)^{n-n_0} u_{n_0}. \end{aligned}$$

3. D'après la question précédente, on a $0 \leq u_n \leq (l + \varepsilon)^{n-n_0} u_{n_0}$. Or, $(l + \varepsilon)^{n-n_0}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ puisque $0 < l + \varepsilon < 1$. Par le théorème d'encadrement, (u_n) tend vers 0.

4. Puisque $l > 1$, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $l - \varepsilon > 1$. Il existe alors un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq l - \varepsilon.$$

Par un raisonnement en tout point similaire à celui de la question précédente, on obtient

$$u_n \geq (l - \varepsilon)^{n-n_0} u_{n_0}.$$

Puisque $(l - \varepsilon) > 1$, la suite $(l - \varepsilon)^{n-n_0}$ tend vers $+\infty$. Il en est de même de (u_n) .

5. Pour $u_n = n$, u_{n+1}/u_n tend vers 1 et (u_n) tend vers $+\infty$. Pour $u_n = 1$, $u_{n+1}/u_n = 1$ et (u_n) tend vers 1. Pour $u_n = 1/n$, u_{n+1}/u_n tend vers 1 et (u_n) tend vers 0. On ne peut donc rien conclure dans ce cas.

Correction de l'exercice 34 ▲

Pour les deux questions, la clé est donnée par la formule suivante, qu'on prouve par récurrence sur n : pour tout $n \geq 0$, on a

$$\frac{u_n}{u_0} \leq \frac{v_n}{v_0}.$$

La formule est en effet vraie au rang 0, et si elle est vraie au rang n , en utilisant l'hypothèse, on déduit

$$\frac{u_{n+1}}{u_0} = \frac{u_{n+1}}{u_n} \times \frac{u_n}{u_0} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \times \frac{v_n}{v_0} = \frac{v_{n+1}}{v_0}.$$

1. Si (v_n) converge vers 0, alors on a

$$0 \leq u_n \leq v_n \frac{u_0}{v_0}$$

et donc par le théorème des gendarmes, (u_n) converge vers 0.

2. Si (u_n) tend vers $+\infty$, alors on a

$$\frac{v_0}{u_0} u_n \leq v_n$$

et donc (v_n) tend vers $+\infty$. Remarquons que pour établir la formule

$$\frac{u_n}{u_0} \leq \frac{v_n}{v_0},$$

on aurait pu aussi remarquer que la condition donnée par l'énoncé entraîne que la suite (u_n/v_n) est décroissante.

Correction de l'exercice 35 ▲

1. Posons $M = \max(|u_1|, \dots, |u_{n_0}|)$. On coupe alors la somme à l'indice n_0 :

$$\begin{aligned} |S_n| &\leq \frac{|u_1| + \cdots + |u_{n_0-1}|}{n} + \frac{|u_{n_0}| + \cdots + |u_n|}{n} \\ &\leq \frac{M + \cdots + M}{n} + \frac{\varepsilon + \cdots + \varepsilon}{n} \\ &\leq \frac{M(n_0 - 1)}{n} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Soit n_1 un entier tel que $\frac{M(n_0-1)}{n_1} \leq \varepsilon$. Alors, pour $n \geq \max(n_0, n_1)$, on a

$$|S_n| \leq \frac{M(n_0-1)}{n} + \varepsilon \leq \frac{M(n_0-1)}{n_1} + \varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

Ceci prouve que (S_n) converge vers 0.

2. Posons $M = \max(|u_1|, \dots, |u_{n_0}|)$. On coupe alors la somme à l'indice n_0 :

$$\begin{aligned} |S_n| &\leq \frac{|u_1| + \dots + |u_{n_0-1}|}{n} + \frac{|u_{n_0}| + \dots + |u_n|}{n} \\ &\leq \frac{M + \dots + M}{n} + \frac{\varepsilon + \dots + \varepsilon}{n} \\ &\leq \frac{M(n_0-1)}{n} + \varepsilon. \end{aligned}$$

3. Soit n_1 un entier tel que $\frac{M(n_0-1)}{n_1} \leq \varepsilon$. Alors, pour $n \geq \max(n_0, n_1)$, on a

$$|S_n| \leq \frac{M(n_0-1)}{n} + \varepsilon \leq \frac{M(n_0-1)}{n_1} + \varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

Ceci prouve que (S_n) converge vers 0.

4. On a $S_{2n} = 0$ et $S_{2n+1} = \frac{-1}{2n+1}$. Ainsi, (S_n) converge vers 0, alors que (u_n) n'est pas convergente. La réciproque du résultat démontré à la première question est donc fausse.

5. Posons $v_n = u_n - l$ et

$$T_n = \frac{v_1 + \dots + v_n}{n} = \frac{(u_1 - l) + \dots + (u_n - l)}{n} = S_n - l.$$

On sait que (v_n) converge vers 0, donc, d'après le résultat de la première question, (T_n) converge vers 0. Ainsi, (S_n) converge vers l .

6. Soit $A > 0$. Il existe n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, on a $u_n \geq A$. Posons aussi $M = \max(|u_1|, \dots, |u_{n_0}|)$. Alors, pour $n \geq n_0$, on a

$$\begin{aligned} S_n &\geq \frac{u_{n_0+1} + \dots + u_n}{n} - \frac{|u_1| + |u_2| + \dots + |u_{n_0}|}{n} \\ &\geq \frac{A(n - n_0)}{n} - \frac{Mn_0}{n}. \end{aligned}$$

Maintenant, $\frac{A(n-n_0)}{n} - \frac{Mn_0}{n}$ converge vers A . Ainsi, il existe un entier n_1 tel que, pour $n \geq n_1$, on a

$$\frac{A(n-n_0)}{n} - \frac{Mn_0}{n} \geq \frac{A}{2}.$$

Finalement, pour $n \geq \max(n_0, n_1)$, on trouve

$$S_n \geq \frac{A}{2}.$$

Ceci prouve que (S_n) tend vers $+\infty$.

Correction de l'exercice 36 ▲

Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a simultanément

$$|u_n - u| < \varepsilon \text{ et } |v_n - v| < \varepsilon.$$

Pour $n \geq n_0$, on coupe la somme définissant w_n en trois parties, en isolant les termes du type $u_k v_{n-k}$ pour lesquels simultanément $k \geq n_0$ et $(n-k) \geq n_0$. On écrit donc :

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{u_0 v_n + \dots + u_{n_0-1} v_{n-n_0+1}}{n+1} + \frac{u_{n-n_0+1} v_{n_0-1} + \dots + u_n v_0}{n+1} + \\ &\quad \frac{u_{n_0} v_{n-n_0} + u_{n_0+1} v_{n-n_0-1} + \dots + u_{n-n_0} v_{n_0}}{n+1} \\ &:= a_n + b_n + c_n. \end{aligned}$$

On étudie séparément chaque terme a_n , b_n et c_n . On note M tel que, pour tout k , $|u_k| \leq M$ et $|v_k| \leq M$. Un tel M existe car les deux suites sont convergentes, donc bornées. Pour a_n et b_n , on a :

$$|a_n| \leq \frac{M \times M + \dots + M \times M}{n+1} = \frac{n_0 M^2}{n+1} \text{ et } |b_n| \leq \frac{n_0 M^2}{n+1}.$$

Puisque $n_0 M^2 / (n+1)$ tend vers 0, il existe $n_1 \geq n_0$ tel que, pour $n \geq n_1$,

$$|a_n| \leq \varepsilon \text{ et } |b_n| \leq \varepsilon.$$

C'est donc c_n qui doit être proche de uv . On va s'inspirer de la preuve du fait que le produit de deux suites convergentes est convergent. Pour cela, on écrit

$$\begin{aligned} c_n - uv &= c_n - \frac{uv + \dots + uv}{n+1} \\ &= \frac{(u_{n_0} v_{n-n_0} - uv) + (u_{n_0+1} v_{n-n_0-1} - uv) + \dots + (u_{n-n_0} v_{n_0} - uv)}{n+1} - \frac{2n_0 uv}{n+1} \end{aligned}$$

(on doit encore retirer les $uv/n+1$ qui ne sont pas en correspondance avec un $u_k v_{n-k}$ pour $k \in \{n_0, \dots, n-n_0\}$). Mais, pour k allant de n_0 à $n-n_0$, on a

$$|u_k v_{n-k} - uv| \leq |u_k| |v_{n-k} - v| + |v| |u_k - u| \leq 2M\varepsilon.$$

D'autre part, il existe $n_2 \geq n_0$ tel que, pour $n \geq n_2$, on a

$$\left| \frac{2n_0 uv}{n+1} \right| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, pour $n \geq n_2$, on a

$$|c_n - uv| \leq \frac{n - 2n_0 + 1}{n+1} \times 2M\varepsilon + \varepsilon \leq (2M+1)\varepsilon.$$

En résumé, pour tout $\varepsilon > 0$, pour $n \geq \max(n_1, n_2)$, on a

$$|w_n - uv| \leq |a_n| + |b_n| + |c_n - uv| \leq (2M+3)\varepsilon.$$

Ceci prouve que (w_n) converge vers uv .

Correction de l'exercice 37 ▲

1. On a $u_{2m} \geq u_m + u_m = 2u_m$ et par une récurrence "immédiate", on a $u_{qm} \geq qu_m$. On en déduit que

$$u_n = u_{mq+r} \geq u_{mq} + u_r \geq qu_m + u_r.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et posons q_n et r_n le quotient et le reste dans la division euclidienne de n par m , $n = q_n m + r_n$, avec $0 \leq r_n < m$. Alors, d'après la question précédente, on a

$$\frac{u_n}{n} \geq \frac{q_n u_m}{q_n m + r_n} + \frac{u_{r_n}}{n}.$$

Mais, la suite (r_n) est bornée alors que la suite (q_n) tend vers $+\infty$. On en déduit que

$$\frac{q_n u_m}{q_n m + r_n} \rightarrow \frac{u_m}{m}.$$

En particulier, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq N_1$,

$$\frac{q_n u_m}{q_n m + r_n} \geq \frac{u_m}{m} - \frac{\varepsilon}{2}.$$

De plus, la suite (u_{r_n}) est bornée puisqu'elle ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs. On en déduit que

$$\frac{u_{r_n}}{n} \rightarrow 0.$$

En particulier, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq N_2$,

$$\frac{u_{r_n}}{n} \geq -\frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalement, posons $N = \max(N_1, N_2)$. Pour $n \geq N$, on a bien

$$\frac{u_n}{n} \geq \frac{u_m}{m} - \varepsilon.$$

3. Fixons simplement $\varepsilon > 0$. Alors, par définition de la borne supérieure, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{u_m}{m} \geq \ell - \varepsilon.$$

D'après la question précédente, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$,

$$\frac{u_n}{n} \geq \frac{u_m}{m} - \varepsilon \geq \ell - 2\varepsilon.$$

Mais puisque par définition de la borne supérieure, on a aussi

$$\frac{u_n}{n} \leq \ell.$$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = \ell$.

Correction de l'exercice 38 ▲

1. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\ell + \varepsilon < 0$ (par exemple, $\varepsilon = -\ell/2$) et posons $A = \ell + \varepsilon$. Puisque $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers ℓ , on sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\ell - \varepsilon \leq u_{n+1} - u_n \leq \ell + \varepsilon$. En particulier, $u_{n+1} - u_n \leq A$. Soit maintenant $N \geq n_0$ et sommons l'inégalité précédente pour n allant de n_0 à $N-1$. La somme apparaissant à gauche de l'inégalité est télescopique, et on trouve

$$u_N - u_{n_0} \leq A(N - n_0) \implies u_N \leq AN - An_0 + u_{n_0}.$$

On en déduit que la suite (u_n) tend vers $-\infty$. En particulier, elle n'est pas bornée. C'est encore plus facile ! Puisque $(u_{n+1} - u_n)$ tend vers $-\infty$, on sait que pour tout $A < 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} - u_n \leq A$. On choisit par exemple $A = -1$ et on réitère le raisonnement précédent. Considérons $v_n = -u_n$ de sorte que $v_{n+1} - v_n = -(u_{n+1} - u_n)$ converge vers $-\ell < 0$. D'après la première question, la suite (v_n) n'est pas bornée. Il en est de même de la suite (u_n) .

2. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\ell + \varepsilon < 0$ (par exemple, $\varepsilon = -\ell/2$) et posons $A = \ell + \varepsilon$. Puisque $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers ℓ , on sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\ell - \varepsilon \leq u_{n+1} - u_n \leq \ell + \varepsilon$. En particulier, $u_{n+1} - u_n \leq A$. Soit maintenant $N \geq n_0$ et sommons l'inégalité précédente pour n allant de n_0 à $N-1$. La somme apparaissant à gauche de l'inégalité est télescopique, et on trouve

$$u_N - u_{n_0} \leq A(N - n_0) \implies u_N \leq AN - An_0 + u_{n_0}.$$

On en déduit que la suite (u_n) tend vers $-\infty$. En particulier, elle n'est pas bornée.

3. C'est encore plus facile ! Puisque $(u_{n+1} - u_n)$ tend vers $-\infty$, on sait que pour tout $A < 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} - u_n \leq A$. On choisit par exemple $A = -1$ et on réitère le raisonnement précédent.

4. Considérons $v_n = -u_n$ de sorte que $v_{n+1} - v_n = -(u_{n+1} - u_n)$ converge vers $-\ell < 0$. D'après la première question, la suite (v_n) n'est pas bornée. Il en est de même de la suite (u_n) .

5. Puisque $(u_{n+1} - u_n)$ est décroissante, elle peut

ou bien tendre vers $-\infty$: mais d'après la question précédente, ceci contredit que (u_n) est bornée ; ou bien tendre vers $\ell \in \mathbb{R}$: dans ce cas, la question précédente et l'hypothèse (u_n) bornée nous dit que nécessairement, $\ell = 0$.

Donc $(u_{n+1} - u_n)$ tend vers 0. Mais puisque cette suite est décroissante, ceci entraîne que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n \geq 0$, soit $u_{n+1} \geq u_n$. La suite (u_n) est donc croissante et bornée : elle converge.

6. ou bien tendre vers $-\infty$: mais d'après la question précédente, ceci contredit que (u_n) est bornée ;

7. ou bien tendre vers $\ell \in \mathbb{R}$: dans ce cas, la question précédente et l'hypothèse (u_n) bornée nous dit que nécessairement, $\ell = 0$.

8. En considérant $v_n = -u_n$, on va prouver de la même façon que (u_n) est convergente.

Correction de l'exercice 39 ▲

1. Extraire une suite consiste à sélectionner certains termes. Pour chercher les suites extraites de (u_{2n}) , il s'agit de trouver toutes les suites pour lesquelles chaque terme est de la forme $2n$, c'est-à-dire est pair. (u_{3n}) ne convient pas (par exemple, pour $n = 1$, u_3 n'est pas un élément de (u_{2n})). En revanche, (u_{6n}) convient, car chaque entier de la forme $6n$ s'écrit encore $2p$, avec $p = 3n$. Ainsi, (u_{6n}) est extraite de (u_{2n}) . Il en est de même de $(u_{3 \cdot 2^{n+1}})$ et de $(u_{2^{n+1}})$, car par exemple $2^{n+1} = 2p$ avec $p = 2^n$. Attention aux faux-amis (u_{2^n}) et $(u_{3 \cdot 2^n})$, qui ne conviennent pas à cause du terme correspondant à $n = 0$. Pour les autres suites :

Les suites extraites de (u_{3n}) sont (u_{6n}) , $(u_{3 \cdot 2^n})$, $(u_{3 \cdot 2^{n+1}})$; Seule la suite $(u_{3 \cdot 2^{n+1}})$ est extraite de (u_{6n}) (remarquons que $3 \cdot 2^{n+1} = 6p$ avec $p = 2^n$); Seule la suite $(u_{3 \cdot 2^{n+1}})$ est extraite de $(u_{3 \cdot 2^n})$; Seule la suite $(u_{2^{n+1}})$ est extraite de (u_{2^n}) (remarquons que $3 \cdot 2^n$ n'est pas une puissance de 2); Aucune des suites proposées n'est extraite de $(u_{2^{n+1}})$; La suite $(u_{3 \cdot 2^{n+1}})$ n'admet pas de suite extraite dans la liste donnée.

2. Les suites extraites de (u_{3n}) sont (u_{6n}) , $(u_{3 \cdot 2^n})$, $(u_{3 \cdot 2^{n+1}})$;

3. Seule la suite $(u_{3 \cdot 2^{n+1}})$ est extraite de (u_{6n}) (remarquons que $3 \cdot 2^{n+1} = 6p$ avec $p = 2^n$);

4. Seule la suite $(u_{3 \cdot 2^{n+1}})$ est extraite de $(u_{3 \cdot 2^n})$;

5. Seule la suite $(u_{2^{n+1}})$ est extraite de (u_{2^n}) (remarquons que $3 \cdot 2^n$ n'est pas une puissance de 2);

6. Aucune des suites proposées n'est extraite de $(u_{2^{n+1}})$;

7. La suite $(u_{3 \cdot 2^{n+1}})$ n'admet pas de suite extraite dans la liste donnée.

8. Posons $v_n = u_{\varphi(n)}$, et soit $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante donnant la suite extraite considérée $(v_{\psi(n)})_n$. On a alors $v_{\psi(n)} = u_{\varphi(\psi(n))}$. Or, $\varphi \circ \psi$ est strictement croissante comme composée d'applications strictement croissantes. La suite $(v_{\psi(n)})$ est donc bien extraite de (u_n) . Remarquons (c'est important!) le sens de la composition. On a bien $\varphi(\psi(n))$ et non $\psi(\varphi(n))$.

Correction de l'exercice 40 ▲

1. Fixons $\varepsilon > 0$ et l la limite commune des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) . Alors, puisque (u_{2n}) converge vers l ,

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, n \geq n_1 \implies |u_{2n} - l| < \varepsilon.$$

De même, puisque (u_{2n+1}) converge vers l ,

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}, n \geq n_2 \implies |u_{2n+1} - l| < \varepsilon.$$

Posons $N = \max(2n_1, 2n_2 + 1)$. Alors, pour $p \geq N$, si p est pair et s'écrit $2n$, on a $n \geq n_1$ et si p est impair et s'écrit $2n + 1$, on a $n \geq n_2$. Dans tous les cas, on trouve

$$|u_p - l| < \varepsilon.$$

C'est bien que la suite (u_n) converge vers l .

2. Posons $u_n = (-1)^n$. Alors $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1$, et donc (u_{2n}) converge vers 1, (u_{2n+1}) converge vers -1 et (u_n) ne converge pas.

3. Notons l_1 la limite de (u_{2n}) , l_2 la limite de (u_{2n+1}) et l_3 la limite de (u_{3n}) . Afin d'utiliser le résultat de la première question, il s'agit de prouver que $l_1 = l_2$. Considérons la suite (u_{6n}) . C'est une suite extraite de (u_{2n}) donc elle converge vers l_1 . C'est aussi une suite extraite de (u_{3n}) , donc elle converge vers l_3 . Par unicité de la limite, on obtient $l_1 = l_3$. Considérons ensuite la suite (u_{6n+3}) , suite extraite aussi bien de (u_{2n+1}) que de (u_{3n}) . En raisonnant comme précédemment, on trouve $l_2 = l_3$. Finalement, on obtient $l_1 = l_2$ et la suite (u_n) est convergente.

Correction de l'exercice 41 ▲

1. Puisqu'une suite convergente est majorée, il suffit de prouver que, dans les conditions de la question 2., la suite (u_n) est convergente. On traite donc directement 2.

2. On va prouver que (u_n) est convergente en prouvant qu'elle est majorée. Soit $(u_{\phi(n)})$ une suite extraite de (u_n) qui est majorée, disons par $M \in \mathbb{R}$. On sait que, pour une suite extraite, on a toujours $\phi(n) \geq n$. On a donc $u_n \leq u_{\phi(n)} \leq M$. Ainsi, la suite (u_n) est croissante et majorée donc elle converge.

3. On va construire par récurrence sur n des entiers $\phi(n)$ tels que

$$\phi(n+1) > \phi(n) \text{ et } u_{\phi(n)} \geq n.$$

Pour $n=0$, il suffit de choisir $\phi(0)$ tel que $u_{\phi(0)} \geq 0$. Supposons $\phi(n)$ construit, et posons $A = \max(n, u_0, \dots, u_{\phi(n)}) + 1$. Puisque (u_k) est non-majorée, on peut trouver un entier p tel que $u_p \geq A$. Mais alors, par choix de A , il est clair que p ne peut être égal à $0, 1, \dots, \phi(n)$. On a donc $p > \phi(n)$ et $u_p \geq n+1$. Le choix $\phi(n+1) = p$ répond alors aux exigences formulées. Mais alors la suite $(u_{\phi(n)})$ est bien une suite extraite de (u_n) , car l'application $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante. De plus, par construction, elle tend vers $+\infty$.

Correction de l'exercice 42 ▲

1. Puisque toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite, la seule valeur d'adhérence d'une suite convergente de limite l est l .

2. La suite $(-1)^n$ ne prend que les valeurs 1 et -1. Il est clair que toute suite extraite ne prenant que l'une de ces deux valeurs ne pourra converger que vers 1 ou vers -1. L'ensemble des valeurs d'adhérence est donc inclus dans $\{-1, 1\}$. D'autre part, en notant $u_n = (-1)^n$, on a $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1$. Ainsi, 1 et -1 sont effectivement des valeurs d'adhérence de (u_n) . Pour la suite (v_n) définie par $v_n = \cos(n\pi/3)$, le même raisonnement prouve que les valeurs d'adhérence sont $\cos(0), \cos(\pi/3), \cos(2\pi/3), \cos(\pi)$, c'est-à-dire 1, 1/2, -1/2 et -1.

3. Posons $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = n$. Alors 1 est valeur d'adhérence, et la suite (u_n) est divergente. De plus, 1 est l'unique valeur d'adhérence de (u_n) . En effet, considérons $(u_{\phi(n)})$ une suite extraite de (u_n) . Si $\phi(n)$ est un entier impair pour une infinité de termes, alors $(u_{\phi(n)})$ est divergente. Sinon, $\phi(n)$ est pair sauf pour un nombre fini d'entiers n et $(u_{\phi(n)})$ est stationnaire donc convergente vers 1.

4. Puisque (u_n) est bornée, le théorème de Bolzano-Weierstrass implique qu'elle admet au moins une valeur d'adhérence a . Puisque (u_n) diverge, on sait qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que $|u_n - a| \geq \varepsilon$. Faisant varier N , on fabrique facilement une suite extraite $(u_{\phi(n)})$ de (u_n) telle que $|u_{\phi(n)} - a| \geq \varepsilon$ pour tout entier n . Maintenant, la suite $(u_{\phi(n)})$ est encore une suite bornée. Elle admet donc une suite extraite $(u_{\phi \circ \psi(n)})$ qui converge vers b , nécessairement différent de a . Mais $(u_{\phi \circ \psi(n)})$ est encore une suite extraite de (u_n) , et b est une deuxième valeur d'adhérence de (u_n) .

Correction de l'exercice 43 ▲

1. Soit (u_n) une suite convergente de limite l . Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq n_0$, on a

$$|u_n - l| < \varepsilon.$$

Mais alors, pour tous $p, q \geq n_0$, on obtient

$$|u_p - u_q| = |(u_p - l) + (l - u_q)| \leq |u_p - l| + |u_q - l| < 2\varepsilon.$$

Ceci prouve que (u_n) est bien une suite de Cauchy.

2. On applique la définition d'une suite de Cauchy avec $\varepsilon = 1$. Alors on sait qu'il existe $N \geq 1$ tel que, pour tout $p, q \geq N$, on a $|u_p - u_q| \leq 1$. En particulier, fixant $q = N$, on a pour $p \geq N$

$$|u_p| \leq |u_N| + 1.$$

Il est alors clair que $|u_n|$ est majoré par

$$\max(|u_0|, \dots, |u_{N-1}|, |u_N| + 1).$$

Soit a la limite de la suite extraite $(u_{\phi(n)})$. Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque (u_n) est une suite de Cauchy, il existe $N \geq 1$ tel que, pour $p, q \geq N$, on a $|u_p - u_q| \leq \varepsilon$. De plus, puisque $(u_{\phi(n)})$ converge vers a , on sait qu'il existe un entier n tel que $\phi(n) \geq N$ et $|u_{\phi(n)} - a| \leq \varepsilon$. Maintenant, si $p \geq \phi(n)$, alors

$$|u_p - a| = |u_p - u_{\phi(n)} + u_{\phi(n)} - a| \leq |u_p - u_{\phi(n)}| + |u_{\phi(n)} - a| \leq 2\varepsilon.$$

Ceci prouve que la suite (u_n) converge bien vers a . Il suffit désormais d'appliquer le théorème de Bolzano-Weierstrass...

3. On applique la définition d'une suite de Cauchy avec $\varepsilon = 1$. Alors on sait qu'il existe $N \geq 1$ tel que, pour tout $p, q \geq N$, on a $|u_p - u_q| \leq 1$. En particulier, fixant $q = N$, on a pour $p \geq N$

$$|u_p| \leq |u_N| + 1.$$

Il est alors clair que $|u_n|$ est majoré par

$$\max(|u_0|, \dots, |u_{N-1}|, |u_N| + 1).$$

4. Soit a la limite de la suite extraite $(u_{\phi(n)})$. Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque (u_n) est une suite de Cauchy, il existe $N \geq 1$ tel que, pour $p, q \geq N$, on a $|u_p - u_q| \leq \varepsilon$. De plus, puisque $(u_{\phi(n)})$ converge vers a , on sait qu'il existe un entier n tel que $\phi(n) \geq N$ et $|u_{\phi(n)} - a| \leq \varepsilon$. Maintenant, si $p \geq \phi(n)$, alors

$$|u_p - a| = |u_p - u_{\phi(n)} + u_{\phi(n)} - a| \leq |u_p - u_{\phi(n)}| + |u_{\phi(n)} - a| \leq 2\varepsilon.$$

Ceci prouve que la suite (u_n) converge bien vers a .

5. Il suffit désormais d'appliquer le théorème de Bolzano-Weierstrass...
